Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 9
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: 17. Dezember 2021, 12:00 Uhr

Abgabe: **14.** Januar 2022, 12:30 Uhr
in dem Holzkasten neben Raum -119
im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Online-Tutorien:

- handschriftlich erstellt (lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- direkt an den entsprechenden Tutor abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 9:	/ 25
Blätter 7 – 9:	/ 65 [+3]

Aufgabe 9.1 (1 + 2 = 3 Punkte)

Geben Sie je eine kontextfreie Grammatik an, welche die spezifizierte Sprache L_i erzeugt.

a) $L_1 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid N_{\mathtt{a}}(w) = 2 \cdot N_{\mathtt{b}}(w)\}$

b) $L_2 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \text{für jedes Präfix } p \text{ von } w \text{ gilt: } N_{\mathtt{a}}(p) \geq N_{\mathtt{b}}(p)\}$

Anmerkung: Nachträgliche Änderung der Aufgabe (p statt w). Beeinflusst Korrektur nicht.

Lösung 9.1

Startsymbol jeweils S:

a) $N = \{\mathtt{S}\}, \quad T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \quad P = \{\mathtt{S} \to \varepsilon \mid \mathtt{SaSaSbS} \mid \mathtt{SaSbSaS} \mid \mathtt{SbSaSaS}\}$

b) $N = \{\mathtt{S}, \mathtt{A}\}, \quad T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \quad P = \{\mathtt{S} \to \varepsilon \mid \mathtt{aA}\ ,\ \mathtt{A} \to \varepsilon \mid \mathtt{aAA} \mid \mathtt{bS}\}$

Aufgabe 9.2 (2 Punkte)

Sei A ein beliebiges Alphabet.

Geben Sie ein Schema an, welches abhängig von A genau die Grammatik G_A mit $L(G_A) = \{w \in A^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ erzeugt. Geben Sie hierzu N_A, T_A, P_A, sowie das Startsymbol der Grammatik (ggf. abhängig von A) an.

Lösung 9.2

$N_A = \{\mathtt{S}\}, \quad T_A = A, \quad P_A = \{\mathtt{S} \to \varepsilon\} \cup \{\mathtt{S} \to a \mid \forall a \in A\} \cup \{\mathtt{S} \to a\mathtt{S}a \mid \forall a \in A\}$

Startsymbol: S

Aufgabe 9.3 (1,5 + 5,5 = 7 Punkte)

In Grammatiken dieser Aufgabe sind **alle** Nichtterminalsymbole zu unterstreichen.

A bezeichne wieder einmal das deutsche Alphabet (inkl. Umlaute).

In der folgenden Grammatik dienen Färbung der Terminalsymbole und Leerzeichen in der Produktionsmenge rein der Übersicht. Das Terminalsymbol „␣“ symbolisiert Leerzeichen in einem erzeugten „Text“. Die besonderen Nichtterminalsymbole „$\underline{\mathtt{a\text{-}z}}$“ und „$\underline{\mathtt{A\text{-}Z}}$“ seien jeweils auf genau einen beliebigen Klein-, bzw. Großbuchstaben aus A ableitbar. Diese Produktionen werden (auch von Ihnen) nie explizit angegeben. *//bessere Übersicht*

R. Einfall ist schwer bemüht die Gunst von „Sie wissen schon wem“ zurückzugewinnen. Hierzu hat sie versucht eine Grammatik G zu konstruieren, die beliebige „Texte“ der deutschen Sprache erzeugen kann.

Das Ergebnis ist folgende Grammatik $G = (N, T, \underline{\mathtt{S}}, P)$, mit:

- $N = \{\underline{\mathtt{S}}, \underline{\mathtt{Satz}}, \underline{\mathtt{Zeichen}}, \underline{\mathtt{Wort}}, \underline{\mathtt{a\text{-}z}}, \underline{\mathtt{A\text{-}Z}}\}$
- $T = \{␣, ., ?, !\} \cup A$
- $P = \{$

  $\underline{\mathtt{S}} \to \underline{\mathtt{Satz}}\ \underline{\mathtt{Zeichen}}\ \underline{\mathtt{S}} \mid \varepsilon,$

  $\underline{\mathtt{Satz}} \to \underline{\mathtt{Wort}}\ ␣\ \underline{\mathtt{Satz}} \mid \varepsilon,$

  $\underline{\mathtt{Wort}} \to \underline{\mathtt{a\text{-}z}} \mid \underline{\mathtt{A\text{-}Z}} \mid \underline{\mathtt{Wort}}\ \underline{\mathtt{Wort}} \mid \varepsilon,$

  $\underline{\mathtt{Zeichen}} \to . \mid ? \mid !$

  $\}$

a) Können die folgenden „Texte“ von G erzeugt werden?

- Falls ja: Geben Sie einen übersichtlichen „Ableitungsweg“ an. Nutzen Sie $\Rightarrow^i$ $(i \in \mathbb{N})$ oder $\Rightarrow^*$ um leicht ersichtliche mehrfache Ableitungsschritte zusammenzufassen.
- Falls nein: Begründen Sie, wieso nicht.

i) `!␣tschö␣mit␣ö␣angela␣!`

ii) `␣wünsche1␣␣schönesneues␣␣jahr␣!11␣`

iii) `TotAL␣cRiNgE␣EY.!?.`

Begriffserklärung:

- „Buchstabe“: Zeichen aus A. Entweder Kleinbuchstabe oder Großbuchstabe. In der Grammatik implizit ableitbar aus $\underline{\texttt{a-z}}$ bzw. $\underline{\texttt{A-Z}}$.
- „Wort“: Beliebig lange Aneinanderreihung von „Buchstaben“
- „Satzzeichen“: Elemente aus $\{., ?, !, ,\}$
- „Leerzeichen“: ␣
- „Text“: Formal betrachtet ein *Wort* $w \in L(G)$.

b) Korrigieren Sie die Grammatik, sodass jeder erzeugbare „Text“ folgende Bedingungen erfüllt:
Ein „Text“ beinhaltet einen oder mehrere „Sätze“. „Sätze“ bestehen aus einem oder mehreren „Worten“ und enden mit genau einem „Satzzeichen“. „Worte“ bestehen aus mindestens einem „Buchstaben“. Ausschließlich der erste „Buchstabe“ eines „Wortes“ kann ein Großbuchstabe sein, die anderen sind Kleinbuchstaben. Der erste „Buchstabe“ des ersten „Wortes“ eines jeden „Satzes“ ist ein Großbuchstabe. Es folgen nie zwei „Worte“, zwei „Leerzeichen“ oder zwei „Satzzeichen“ direkt aufeinander. Ebenso folgt nie ein „Satzzeichen“ direkt auf ein „Leerzeichen“ oder ein „Buchstabe“ direkt auf ein „Satzzeichen“. Das besondere „Satzzeichen“ „,“ kann beliebig im „Text“ stehen, solange dabei keine anderen Bedingungen verletzt sind, aber niemals am Satzanfang oder -ende. Sonst enthält ein „Text“ keine „Satzzeichen“.

Anmerkungen:

- Achten Sie auf eine lesbare und ordentliche Lösung!
  - Unterstreichen Sie alle Nichtterminalsymbole
  - Verwenden Sie aussagekräftige Namen für ihre Nichtterminalsymbole
  - Beschreiben Sie ggf. die Funktionsweise ihrer Grammatik
  - Unleserliche / Unordentliche Lösungen werden nicht bewertet
  - Im Zweifel müssen **Sie** die Korrektheit ihrer Lösung beweisen
- Es gibt Teilpunkte für Grammatiken, welche die Bedingungen nicht vollständig erfüllen.

Lösung 9.3

a) i) „!␣tschö␣␣mit␣ö␣angela␣!“ ist folgendermaßen erzeugbar:
$S \Rightarrow^2 \underline{\texttt{Satz}}\ \underline{\texttt{Zeichen}}\ \underline{\texttt{Satz}}\ \underline{\texttt{Zeichen}}\ \underline{\texttt{S}}$
$\Rightarrow^* \varepsilon\ !\ \underline{\texttt{Wort}}\ ␣\ \underline{\texttt{Wort}}\ ␣\ \underline{\texttt{Wort}}\ ␣\ \underline{\texttt{Wort}}\ ␣\ \underline{\texttt{Wort}}\ ␣\ \underline{\texttt{Satz}}\ !\ \varepsilon$
$\Rightarrow^* \varepsilon\ !\ \varepsilon$ ␣tschö␣mit␣ö␣angela␣ $\varepsilon\ !\ \varepsilon =$!␣tschö␣mit␣ö␣angela␣!

ii) „␣wünsche1␣␣schönesneues␣␣jahr␣!11␣“ einhält das Zeichen „1“, welches nicht Teil des Terminalsymbolalphabets ist. Kann also **nicht** erzeugt werden.

iii) „TotAL␣cRiNgE␣EY.!?.“ kann **nicht** erzeugt werden, da zwischen dem letzten „Wort“ eines „Satzes“ stets ein „␣“ vor dem „Satzzeichen“ kommen muss.

b) $G = N, T, S, P$

- $N = \{\underline{\texttt{S}}, \underline{\texttt{S'}}, \underline{\texttt{Satz}}, \underline{\texttt{Restsatz}}, \underline{\texttt{Zeichen}}, \underline{\texttt{Wort}}, \underline{\texttt{Grosswort}}, \underline{\texttt{Komma?}}, \underline{\texttt{a-z}}, \underline{\texttt{A-Z}}\}$
- $T = \{$␣, ., ?, !, ,$\} \cup A$
- $P = \{$
  $\underline{\texttt{S}} \rightarrow \underline{\texttt{Satz}}\ \underline{\texttt{S'}},$

$\underline{\texttt{S'}} \to \text{␣}\, \underline{\texttt{Satz}}\ \underline{\texttt{S'}}\ \mid \varepsilon,$

$\underline{\texttt{Satz}} \to \underline{\texttt{Grosswort}}\ \underline{\texttt{Komma?}}\ \underline{\texttt{Restsatz}} \mid \underline{\texttt{Grosswort}}\ \underline{\texttt{Zeichen}},$

$\underline{\texttt{Grosswort}} \to \underline{\texttt{A-Z}} \mid \underline{\texttt{A-Z}}\ \underline{\texttt{Wort}}$

$\underline{\texttt{Wort}} \to \underline{\texttt{a-z}} \mid \underline{\texttt{a-z}}\ \underline{\texttt{Wort}},$

$\underline{\texttt{Zeichen}} \to \texttt{.} \mid \texttt{?} \mid \texttt{!}$

$\underline{\texttt{Restsatz}} \to \text{␣}\ \underline{\texttt{Wort}}\ \underline{\texttt{Komma?}}\ \underline{\texttt{Restsatz}} \mid \text{␣}\ \underline{\texttt{Grosswort}}\ \underline{\texttt{Komma?}}\ \underline{\texttt{Restsatz}}$

$\underline{\texttt{Restsatz}} \to \text{␣}\ \underline{\texttt{Wort}}\ \underline{\texttt{Zeichen}} \mid \text{␣}\ \underline{\texttt{Grosswort}}\ \underline{\texttt{Zeichen}}$

$\underline{\texttt{Komma?}} \to \texttt{,} \mid \varepsilon$

}

Aufgabe 9.4 (1 Punkt)

Gegeben:

- drei prädikatenlogische-Variablen: $\texttt{x}$, $\texttt{y}$, $\texttt{z}$
- zwei prädikatenlogische-Konstanten: $\texttt{c}$, $\texttt{d}$
- vier prädikatenlogische-Funktionssymbole:
  - $\texttt{f}_1$, mit $\mathrm{ar}(\texttt{f}_1) = 2$ – $\texttt{f}_2$, mit $\mathrm{ar}(\texttt{f}_2) = 4$ – $\texttt{g}$, mit $\mathrm{ar}(\texttt{g}) = 3$ – $\texttt{h}$, mit $\mathrm{ar}(\texttt{h}) = 1$

Geben Sie A_{Ter} und P_{Ter} einer Grammatik $G_{Ter} = (\{X_T\}, A_{Ter}, X_T, P_{Ter})$ an, die alle prädikatenlogischen Terme (bestehend aus den oben aufgeführten Konstrukten) erzeugt.

Lösung 9.4

- $A_{Ter} = \{\texttt{(}, \texttt{,}, \texttt{)}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{f}_1, \texttt{f}_2, \texttt{g}, \texttt{h}\}$
- $P_{Ter} = \{X_T \to \texttt{c} \mid \texttt{d} \mid \texttt{x} \mid \texttt{y} \mid \texttt{z} \mid \texttt{f}_1\texttt{(}X_T\texttt{,}X_T\texttt{)} \mid \texttt{f}_2\texttt{(}X_T\texttt{,}X_T\texttt{,}X_T\texttt{,}X_T\texttt{)} \mid \texttt{g(}X_T\texttt{,}X_T\texttt{,}X_T\texttt{)} \mid \texttt{h(}X_T\texttt{)}\}$

Aufgabe 9.5 (2 + 1 + 1,5 + 1 + 1,5 = 7 Punkte)

Sei $\texttt{R}$ ein zweistelliges- und $\texttt{S}$ ein einstelliges Relationssymbol.
Gegeben seien folgende prädikatenlogische Formeln:

$$F = \forall\texttt{x}\,(\,(\texttt{R(x,y)} \wedge \texttt{S(x)}) \to \texttt{S(y)}\,)$$

$$G = \texttt{R(z,x)} \to \texttt{R(z,y)}$$

$$H = (\exists\texttt{z}\,\forall\texttt{y}\; G) \to F$$

a) Geben Sie eine Interpretation (D, I) sowie Variablenbelegungen β_1 und β_2 an, sodass $val_{D,I,\beta_1}(F) = \mathbf{f}$ und $val_{D,I,\beta_2}(F) = \mathbf{w}$ ist.

b) Geben Sie $\mathrm{fv}(H)$ und $\mathrm{bv}(H)$ explizit an.

c) Geben Sie die Formeln $H_1 = \sigma_{\texttt{y/x}}(H)$ und $G_1 = \sigma_{\texttt{z/y}}(G)$ explizit an.

d) Sind die Substitutionen in c) kollisionsfrei? Begründen Sie ihre Antwort.

e) Ist H allgemeingültig? Beweisen sie ihre Antwort.

Lösung 9.5

a) Eine Möglichkeit:
   - $D = \{0, 1\}$ • $I(\texttt{R}) = \{(0,1), (0,0)\}$ • $I(\texttt{S}) = \{0\}$ • $\beta_1(\texttt{y}) = 1$, $\beta_2(\texttt{y}) = 0$

b) $\mathrm{fv}(H) = \{\texttt{x}, \texttt{y}\}$, $\mathrm{bv}(H) = \{\texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}\}$

c) $H_1 = \exists\texttt{z}\,\forall\texttt{y}\,(\texttt{R(z,x)} \to \texttt{R(z,y)}) \to \forall\texttt{x}\,(\,(\texttt{R(x,x)} \wedge \texttt{S(x)}) \to \texttt{S(x)}\,)$

   $G_1 = \texttt{R(y,x)} \to \texttt{R(y,y)}$

d) $\sigma_{\texttt{y/x}}(H)$ ist nicht kollisionsfrei, da das $\texttt{y}$ in F durch $\texttt{x}$ ersetzt wird und somit durch $\forall\texttt{x}$ gebunden wird.

   $\sigma_{\texttt{z/y}}(G)$ ist kollisionsfrei, da in G kein Quantor existiert und somit keine gebundenen Variablen entstehen können.

e) H ist **nicht** allgemeingültig. Sei:
$D = \{0,1\}, \quad I(\mathtt{R}) = \{(0,1),(0,0)\}, \quad I(\mathtt{S}) = \{0\}, \quad \beta_1(\mathtt{y}) = 1, \beta_1(\mathtt{z}) = 0.$
Dann gilt nach a):
$val_{D,I,\beta_1}(F) = \mathbf{f}$, aber $val_{D,I,\beta_1}(\exists\mathtt{z}\,\forall\mathtt{y}\,G) = \mathbf{w}$ und somit $val_{D,I,\beta_1}(H) = \mathbf{f}$.

Aufgabe 9.6 (0,5 + 1,5 + 1,5 + 1 + 0,5 = 5 Punkte)

Dank der automatisierten Entschlüsselung mit ihrem MIMA-Programm können die B.I.R.D-Daten nun endlich genutzt werden, um die Schurkenkonkurrenz auszuspähen. Leider müssen die Bilddaten immer noch vollständig manuell ausgewertet werden. Diese Arbeit hätte ein m.i.m.A zwar übernehmen können, aber seit dem schwarzen Freitag sind alle ausverkauft und aufgrund eines unerwarteten* Preisanstiegs von Quanten-KI-Chips können Sie nachträglich keinen erwerben. Ihre Aufgabe ist es, zusammen mit B. Scheuert, die Effektivität dieser Operation prädikatenlogisch zu untersuchen.
Hierzu sei B die Menge aller zur B.I.R.D-Drohnen, S die Menge aller Schurken und $D = B \cup S$.
Formalisieren Sie die folgenden Aussagen aus b) - d) in Prädikatenlogik. Definieren Sie hierzu ggf. zusätzliche Relationen um die einzelnen Beziehungen zwischen Elementen des *Universums* auszudrücken. Verwenden Sie dabei **keine** vereinfachenden Abkürzungen wie „$\in$“. Geben Sie für alle von Ihnen definierten Relationen $\mathtt{R}$ $I(\mathtt{R})$ explizit an!

a) Definieren Sie zunächst zwei Relationen $\mathtt{B}$ und $\mathtt{S}$, die ausdrücken, ob ein Element des Universums eine B.I.R.D-Drohne oder ein Schurke ist. Geben sie die *Stelligkeit* der definierten Relationen an.
b) „Jeder Schurke kennt einen anderen Schurken, der (unwissentlich) von einer B.I.R.D.-Drohne ausgespäht wird.“
c) „Keine zwei B.I.R.D.-Drohnen spähen den gleichen Schurken aus.“
d) i) „Jede B.I.R.D.-Drohne späht mindestens einen Schurken aus.“
   ii) „Jeder Schurke wird von mindestens einer B.I.R.D.-Drohne ausgespäht.“
e) Sind die Formeln, die Sie aus d) erhalten, logisch äquivalent? Begründen Sie kurz!

**leider sind Quanten-KI-Chips (noch) keine Cryptowährung, weshalb der Preisanstieg nicht von ihrer Funktion aus Übungsblatt 2 vorhergesagt wurde.*

Lösung 9.6

a) $\mathtt{B}$ und $\mathtt{S}$ seien einstellige Relationssymbole mit $I(\mathtt{B}) = B$ und $I(\mathtt{S}) = S$.

Wir definieren für b) - d) die folgenden Relationssymbole:

- $\mathtt{R}$ sei ein zweistelliges Relationssymbol, wobei $I(\mathtt{R}) \subseteq B \times S$ die Relation ist, für die gilt: $(b,s) \in I(\mathtt{R})$ gdw. b s ausspäht.
- $\mathtt{K}$ sei ein zweistelliges Relationssymbol, wobei $I(\mathtt{K}) \subseteq S \times S$ die Relation ist, für die gilt: $(s,t) \in I(\mathtt{K})$ gdw. s t kennt.

b) $\forall\mathtt{x}\,(\,\mathtt{S(x)} \rightarrow \exists\mathtt{y}\,(\,\mathtt{S(y)} \wedge \neg(\mathtt{x} \doteq \mathtt{y}) \wedge \mathtt{K(x,y)} \wedge (\exists\mathtt{z}\,(\,\mathtt{B(z)} \wedge \mathtt{R(z,y)}\,))))$
c) $\forall\mathtt{x}\,\forall\mathtt{y}\,((\mathtt{B(x)} \wedge \mathtt{B(y)} \wedge \neg(\mathtt{x} \doteq \mathtt{y})) \rightarrow \neg(\exists\mathtt{z}\,(\mathtt{S(z)} \wedge \mathtt{R(x,z)} \wedge \mathtt{R(y,z)})\,))$
d) i) F = $\forall\mathtt{x}\,(\,\mathtt{B(x)} \rightarrow \exists\mathtt{y}\,(\mathtt{S(y)} \wedge \mathtt{R(x,y)})\,)$
   ii) G = $\forall\mathtt{y}\,(\,\mathtt{S(y)} \rightarrow \exists\mathtt{x}\,(\mathtt{B(x)} \wedge \mathtt{R(x,y)})\,)$
e) Nein, F und G sind **nicht** äquivalent. Wählen wir etwa
   - $D' = I'(\mathtt{B}) = I'(\mathtt{S}) = \mathbb{N}$
   - $I'(\mathtt{R})$ als $\leq$
   - β *beliebig* mit $\beta(x) \in D,\ \forall x \in Var$

   so ist (D', I', β) Modell von F, nicht jedoch von G.
   Anmerkung: β *beliebig* da beide Formeln geschlossen.

Dr. Meta wünscht Ihnen (be)weis[s](frei)e Weihnachten und `einen` *guten Rutsch ins Jahr 2022!*