Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 5
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 19. November 2021, 12:00 Uhr

Abgabe: 26. November 2021, 12:30 Uhr
in dem Holzkasten neben Raum -119
im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Online-Tutorien:

- handschriftlich erstellt (lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- direkt an den entsprechenden Tutor abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 5: / 19,5 Blätter 1 – 5, Stud. 1: / 99,5

Blätter 1 – 5, Stud. 2: / 99,5

Hinweis: Auf diesem Blatt beträgt die Maximalpunktzahl 22P. Diese wird auf späteren Blättern ausgeglichen, sodass Sie im Schnitt mit max. 20P pro Blatt rechnen können.

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)
Sei A ein Alphabet und $h : A^* \to A^*$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass für alle $w \in A^+$ gilt: $h(w) = h(w(0)) \cdot h(w(1)) \cdot ... \cdot h(w(|w| - 1))$

Lösung 5.1
Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion über die Wortlänge $|w| \in \mathbb{N}_+$:

IA: $|w| = 1$
Für $|w| = 1$, also $w = w(0)$ gilt offensichtlich: $h(w) = h(w(0))$

IV: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt die zu zeigende Behauptung für alle w mit $|w| = n$

IS: $|w| \to n + 1$
Es gilt für w mit $|w| = n + 1$: $w = w_l w(n)$, mit $w_l = w(0) \cdot w(1) \cdot ... \cdot w(n-1)$ und $|w_l| = n$. Da h ein Homomorphismus ist und $w_l, w(n) \in A^+ \subseteq A^*$ gilt ferner:
$h(w) = h(w_l) \cdot h(w(n)) \overset{IV}{=} h(w(0)) \cdot h(w(1)) \cdot ... \cdot h(w(n-1)) \cdot h(w(n))$.

Aufgabe 5.2 (1 [+ 2,5] + 1,5 = 2,5 [+ 2,5] Punkte)
Seien A, B beliebige Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. In dieser Aufgabe gelten zwei Funktionen g, g' als *verschieden*, wenn mindestens ein x mit $g(x) \neq g'(x)$ existiert.

a) Sei $|A| = 5$ und $|B| = 2$. Wie viele *verschiedene* Rechtsinverse kann f maximal besitzen? Begründen Sie.

b) Sei $B \neq \emptyset$ und f surjektiv. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an $|A|$ an, sodass f mehrere *verschiedene* Rechtsinverse besitzen kann. Beweisen Sie die Notwendigkeit der Bedingung. *Diese Aufgabe gibt 2,5 Bonuspunkte.*

c) Geben Sie zwei Mengen A, B, sowie eine Abbildung $f : A \to B$, die mindestens 2 *verschiedene* Linksinverse $l_1, l_2 : B \to A$ besitzt, explizit an. Geben Sie auch beide Linksinverse explizit an.

Lösung 5.2

a) f kann maximal 6 verschiedene Rechtsinverse besitzen. *Erklärung (nicht gefordert):* f muss surjektiv sein, um überhaupt Rechtsinverse zu haben. Das schränkt die „Funktionsweise" von f stark ein. **Eine** Möglichkeit wie f definiert sein kann um 6 Rechtsinverse zu erreichen, ist z.b. Folgende:
Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
$f(1) = f(2) = f(3) = \mathtt{a} \quad f(4) = f(5) = \mathtt{b}$
Hier gibt es jetzt für eine Rechtsinverse f^{-r} von f drei Möglichkeiten für $f^{-r}(\mathtt{a})$ und zwei Möglichkeiten für $f^{-r}(\mathtt{b})$, also insgesamt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten wie man $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ abbilden kann um eine Rechtsinverse von f zu bilden. Daher 6 Möglichkeiten für Rechtsinverse. In einem Szenario in dem f vier Elemente auf das gleiche Element aus B abbildet sind nur $4 < 6$ verschiedene Rechtsinverse möglich.
Anmerkung: Aufgabe schwerer als ursprünglich gedacht. Hätte eher 2-2,5P verdient.

b) $|A| > |B|$
Beweis:
Als Abbildung muss f rechtseindeutig sein. Damit f überhaupt eine Rechtsinverse hat, muss f nach Vorlesung auch surjektiv sein. Ferner darf f nicht injektiv sein, sonst wäre f bijektiv und besäße damit nach Vorlesung genau eine Umkehrfunktion, die sowohl Rechts- als auch Linksinverse wäre. Damit f surjektiv und rechtseindeutig, aber nicht-injektiv sein kann, muss $|A| > |B|$ gelten.

Erklärung (nicht gefordert):
Da jedes Element aus A nur auf ein Element aus B abgebildet werden darf (Rechtseindeutigkeit), auf alle Elemente aus B abgebildet werden muss (Surjektivität) und es mindestens zwei Elemente gibt, die auf das gleiche Element aus B abbilden (Nicht-Injektivität), braucht es in A mindestens ein Element mehr als in B.

c)
- $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$
- $f(x) = x$, für $x \in A$
- $l_1(x) = x$, für $x \in \{1,2\}$, $l_1(3) = 1$
- $l_2(x) = x$, für $x \in \{1,2\}$, $l_2(3) = 2$

Aufgabe 5.3 (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)
Seien A, B beliebige Alphabete. Im Folgenden erweitern wir den Begriff der ε-Freiheit auf beliebige Funktionen $f : A^* \to B^*$ wie folgt:
f ist ε-frei, wenn gilt: $f(w) \neq \varepsilon$, für alle $w \in A^+$

a) Zeigen Sie, dass diese Definition von ε-Freiheit für Homomorphismen $h : A^* \to A^*$ mit der Definition von ε-Freiheit aus der Vorlesung äquivalent ist.
Tipp: Das heißt, dass h entweder beide oder keine der beiden Definitionen erfüllt.

Sei im Folgenden $f : A^* \to A^*$ eine beliebige Funktion mit den in der jeweiligen Teilaufgabe spezifizierten Eigenschaften. Ist f (im Allgemeinen) ein Homomorphismus? Ist f ε-frei im Sinne der Aufgabe? Beantworten und beweisen Sie jeweils beide Fragen.

b) $f(w) = \varepsilon$, für alle $w \in A^*$
c) $f(x) = x$, mit $x \in A$ und $|f(w)| = |w|$, für alle $w \in A^*$
d) für alle Teilworte lmr von w gilt: $f(lmr) = f(l) \cdot f(m) \cdot f(r)$ für alle $l, m, r \in A \cup \{\varepsilon\}$, und alle $w \in A^*$

Lösung 5.3

a) Wir zeigen die Äquivalenz beider Definitionen, indem wir zeigen, dass aus „h erfüllt Definition aus der Vorlesung" folgt: „h erfüllt die Definition aus der Aufgabe" - und umgekehrt.
Zeige zunächst: h erfüllt Def. aus der Vorlesung $\Rightarrow$ h erfüllt Def. aus der Aufgabe:
Da h ein Homomorphismus ist, gilt nach Aufgabe 5.1 für $w = w(0) \cdot w(1) \cdot ... \cdot w(n-1)$ mit $w(i) \in A$: $h(w) = h(w(0)) \cdot h(w(1)) \cdot ... \cdot h(w(n-1))$. Da h die Def. aus der Vorlesung erfüllt, gilt: $h(x) \neq \varepsilon$, für alle $x \in A$, also $h(w(i)) \neq \varepsilon$ und folglich $h(w) \neq \varepsilon$. *(Fortsetzung auf der nächsten Seite)*
Zeige nun: h erfüllt Def. aus Aufgabe $\Rightarrow$ h erfüllt Def. aus der Vorlesung:
Nach Def. aus der Aufgabe gilt: $h(w) \neq \varepsilon$ für alle $w \in A^+$ und da $A \subset A^+$, folglich auch für alle $x \in A$.

b) f ist offensichtlich ein Homomorphismus, da gilt: $f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2) = \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon$ und trivialerweise nicht ε-frei.
Anmerkung: (Erst) mit Bestehen der GBI Klausur erhalten Sie die (in)offizielle Lizenz für Aufgaben wie diese schlicht „Beweis trivial" zu schreiben. Nutzen Sie diese Macht später mit Bedacht.

c) f ist **kein** Homomorphismus, aber ε-frei.
ε-Freiheit folgt direkt aus der Bedingung $|f(w)| = |w|$, für alle $w \in A^*$
Gegenbeispiel für nicht-Homomorphismus: *reverse* (siehe Aufgabe 5.5)
Bsp: $\mathit{reverse}(\mathtt{ab}) = \mathtt{ba} \neq \mathit{reverse}(\mathtt{a}) \cdot \mathit{reverse}(\mathtt{b}) = \mathtt{ab}$

d) f ist **kein** Homomorphismus und **nicht** ε-frei, wie folgende Funktion zeigt:

$$f(w) := \begin{cases} w, & \text{falls } |w| \leq 3 \\ \varepsilon, & \text{falls } |w| > 3 \end{cases}$$ *Anmerkung:* Andere Gegenbeispiele möglich.

Aufgabe 5.4 (1,5 + 3 = 4,5 Punkte)

Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Gegeben seien folgende Funktionsdefinitionen:

$$\begin{aligned}
boss(w) &= worker(w, \varepsilon) \\
worker(\varepsilon, w') &= w' && (1) \\
worker(\mathtt{a}w, \varepsilon) &= \mathtt{a} \cdot worker(w, \mathtt{b}) && (2) \\
worker(\mathtt{a}w, \mathtt{a}^i) &= \mathtt{a} \cdot worker(w, \mathtt{a}^{i-1}) && (3) \\
worker(\mathtt{a}w, \mathtt{b}^i) &= \mathtt{a} \cdot worker(w, \mathtt{b}^{i+1}) && (4) \\
worker(\mathtt{b}w, \varepsilon) &= \mathtt{b} \cdot worker(w, \mathtt{a}) && (5) \\
worker(\mathtt{b}w, \mathtt{a}^i) &= \mathtt{b} \cdot worker(w, \mathtt{a}^{i+1}) && (6) \\
worker(\mathtt{b}w, \mathtt{b}^i) &= \mathtt{b} \cdot worker(w, \mathtt{b}^{i-1}) && (7)
\end{aligned}$$

je für alle $w, w' \in A^*, i \in \mathbb{N}_+$

a) Was berechnet $boss(w)$, für $w \in A^*$? Geben Sie eine genaue formale Definition der Ausgabe an.

b) Beschreiben Sie die Vorgehensweise der Funktionen möglichst präzise (= kurz, aber verständlich). Beantworten Sie dabei folgende Fragen:
- Welche Funktion hat der 2. Parameter von *worker*?
- Was „passiert" in Zeile (2) und (5)?
- Was „passiert" in Zeile (3) und (7)?
- Was „passiert" in Zeile (4) und (6)?
- Wozu dient Zeile (1)?

Lösung 5.4

a) $$boss(w) = \begin{cases} w \cdot a^{N_b(w)-N_a(w)} & \text{, für jedes } w \in A^*\text{, mit } N_b(w) > N_a(w) \\ w \cdot b^{N_a(w)-N_b(w)} & \text{, für jedes } w \in A^*\text{, mit } N_a(w) > N_b(w) \\ w & \text{, für jedes } w \in A^*\text{, mit } N_a(w) = N_b(w) \end{cases}$$

Hierbei steht $N_x(w)$ für die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x in w.

b) *boss* leitet das Eingabewort w an *worker* durch. Die Hilfsfunktion *worker* bearbeitet das Eingabewort w (1. Parameter) zeichenweise. Die bearbeiteten Zeichen werden dabei effektiv nach vorne „durchgereicht", da die Ausgabe von *boss* ja aus zwei Komponenten bestehen soll: w selbst und einem Anhang w', der $N_a(ww') = N_b(ww')$ sicher stellen soll. w' wird im 2. Parameter von *worker* schrittweise aufgebaut und dient dabei indirekt als „Buffer": In w' wird zu jedem Zeitpunkt die Defizitanzahl des unterrepräsentierten Zeichens als Wort gespeichert. $\mathtt{b}^i$ im Buffer bedeutet, dass im bisher bearbeiteten Präfix p von w gilt: $N_a(p) = N_b(p) + i$. Analog bedeutet $\mathtt{a}^i$ im Buffer, dass $N_a(p) + i = N_b(p)$. ε im Buffer repräsentiert eine ausgeglichene Anzahl $\mathtt{a}$'s und $\mathtt{b}$'s. Die Berechnung kann effektiv in diese 3 Zustände (bisher mehr $\mathtt{a}$'s, bisher mehr $\mathtt{b}$'s, bisher ausgeglichen) unterteilt werden. In Zeile (4), bzw. (6) wird das überrepräsentierte Zeichen aus p ein weiteres Mal in w angetroffen und entsprechend die Anzahl der Ausgleichszeichen je um 1 erhöht. Analog wird in Zeile (3) und (7) das unterrepräsentierte Zeichen aus p in w angetroffen und die Anzahl der Ausgleichszeichen um 1 verringert. Zeilen (2) und (5) bedeuten einen „Zustandswechsel" in der Berechnung weg von ausgeglichener Anzahl hin zu einem überrepräsentierten Zeichen. Zeile (1) wird effektiv nach Abarbeitung von w erreicht und symbolisiert so etwas wie einen „Rekursionsabbruch", der dazu führt, dass w' an w konkateniert wird.

Aufgabe 5.5 (0,5 + 1 + 2 = 3,5 Punkte)
Dr. Meta ist außer sich! Durch seine Drohnen hat er erfahren, dass es in letzter Zeit immer häufiger zu Verwechslungen mit einem gewissen Markus Zuckertal gekommen ist, der seine Firma nach ihm benannt hat, kam. Im Vergleich seiner genial bösen Person, die natürlich an einer nicht wirklich sehr bekannten, aber bekanntermaßen wirklich sehr elitären Institution promoviert hat, ist Markus ein Uniabbrecher und sein Firmchen keine globale, die gesamte Menschheit (z.B: mit B.I.R.D-Drohnen) ausspähende Megakorporation, sondern ein paar (während der Klausurenphase unbedingt!) vernachlässigbare soziale Netzwerkle und Messengerli. In eben Letzteren wird der wahrlich einzigartige Dr. Meta seine Wut entladen, indem er eine Sammlung genial böser Vielleicht-Homomorphismen auf Wörter aller Art loslässt. Als sein*e neue*r Lieblingsassistent*in dürfen Sie diese für ihn definieren.
Definieren Sie (ggf. induktiv) Abbildungen, die Dr. Metas Anforderungen erfüllen:

a) $reverse : A^* \to A^*$ soll die Reihenfolge der Zeichen jedes Eingabewortes $w \in A^*$ umkehren. Bsp: $reverse(\texttt{atem}) = \texttt{meta}$
b) $eliminate_M : A^* \to A^*$ soll alle Vorkommen der Zeichen $x \in M$ (stets: $\varepsilon \notin M$) aus jedem Eingabewort w entfernen. Bsp: $eliminate_{\{\texttt{o},\texttt{u},\texttt{l},\texttt{n}\}}(\texttt{monumental}) = \texttt{mmeta}$
c) Sei $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$. $equalize : A^* \to A^*$ soll jedes $w \in A^*$ auf ein w', mit $N_a(w') = N_b(w')$ abbilden und ein injektiver, ε-freier Homomorphismus sein. Verwenden Sie für die Definition der Funktion allerdings **nicht** N_x oder analog funktionierende Funktionen mit anderem Namen!

Sie müssen die jeweils geforderten Eigenschaften **nicht** beweisen, sondern nur erfüllen!

Lösung 5.5

a) Eine mögliche Lösung:
$reverse(\varepsilon) = \varepsilon, \quad reverse(wx) = x \cdot reverse(w)$, für $x \in A, w \in A^*$
b) Eine mögliche Lösung:

$$eliminate_M(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$eliminate_M(xw) = \begin{cases} eliminate_M(w) & \text{, falls } x \in M \\ x \cdot eliminate_M(w) & \text{, falls } x \notin M \end{cases} \quad \text{, für } x \in A, w \in A^*$$

c) Eine mögliche Lösung:

$$\begin{aligned} equalize(\varepsilon) &= \varepsilon \\ equalize(\texttt{a}w) &= \texttt{ab} \cdot equalize(w) \\ equalize(\texttt{b}w) &= \texttt{ba} \cdot equalize(w) \end{aligned}$$

, für $w \in A^*$