Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 1
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.: Tutor*in:

Matr.nr. 1:

Nach-,Vorname 1: ,

Matr.nr. 2:

Nach-,Vorname 2: ,

Ausgabe: Freitag, 22.10.2021, 12:00 Uhr

Abgabe: Freitag, 29.10.2021, 12:30 Uhr
in dem Holzkasten neben dem Raum -119
im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Online-Tutorien:

- handschriftlich erstellt (lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- direkt an den entsprechenden Tutor abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 1: / 20 Blätter 1 – 1, Stud. 1: / 20

Blätter 1 – 1, Stud. 2: / 20

Fachschaftsveranstaltungen für Erstis

Du interessierst dich für die Arbeit der Fachschaft und möchtest dich vielleicht gerne selbst engagieren? Schau einfach vorbei am **26. Oktober um 19:00 Uhr** beim **Semesterauftakttreffen**. Hier zeigen wir dir, wie die Fachschaft organisiert ist, was ihre Aufgaben sind und wie du dich bei uns einbringen kannst.
Außerdem haben wir einen **Einstiegs-Fachschaftsrat** für den **3. November um 17:30 Uhr** geplant. Dort kannst du erfahren, wie die Fachschaft Entscheidungen trifft und selbst mitentscheiden.

Aufgabe 1.1 (0,5 + 0,5 + 2 + 1 = 4 Punkte)
Es seien A, B, C beliebige Mengen. Vereinfachen Sie die Mengenausdrücke soweit wie möglich. Geben Sie bei c) und d) jeweils Zwischenschritte an.

a) $(A \cap B) \cap (A \cap C) \cap (B \cap C)$
b) $(A \setminus B) \cup (B \cap A) \cup (B \setminus A)$
c) $(B \setminus (B \cap A)) \cup ((A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)))$
d) $(((A \setminus B) \cap (B \setminus A)) \setminus B) \cup (((C \setminus A) \setminus C) \cap C)$

Lösung 1.1

a) $(A \cap B) \cap (A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
b) $(A \setminus B) \cup (B \cap A) \cup (B \setminus A) = A \cup B$
c) $(B \setminus (B \cap A)) \cup ((A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))) = (B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$
d) $(((A \setminus B) \cap (B \setminus A)) \setminus B) \cup (((C \setminus A) \setminus C) \cap C) = (\emptyset \setminus B) \cup (\emptyset \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

Aufgabe 1.2 (3 Punkte)
In dieser Aufgabe, wollen wir zeigen, dass $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ für beliebige Mengen A, B, C gilt.
Bringen Sie dazu die unten aufgelisteten "Beweisschnipsel" in die richtige Reihenfolge. Beachten Sie, dass nicht alle Schnipsel in den Beweis gehören. Eine korrekte Lösung enthält genau alle notwendigen Schnipsel in der richtigen Reihenfolge.

[Anfang:] Wir zeigen: $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- Fall 3: $a \in (C \cup B)$
- Sei also: $a \in (A \cup B) \cap C$
- Dann muss: $a \in (B \cap C)$ gelten.
- Damit ist die Aussage gezeigt (q.e.d).
- Fall 1: $a \in A$ (und $a \in C$)
- Indem wir zeigen, dass für alle $a \in (A \cup B) \cap C$ auch $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ gilt.
- Und somit (trivialerweise): $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- Fallunterscheidung:
- Und somit (trivialerweise): $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

- oder anders gesagt: $a \in (A \cup B)$ und $a \in C$.
- Fall 2: $a \notin A$, aber $a \in (A \cup B) \cap C$
- Es gibt ein a, für das gilt: Wenn $a \in A \cap C$, dann auch $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- Folglich: $a \in (A \cap C)$
- Fall Blau: Beware, winter is coming!

Lösung 1.2
[Wir zeigen: $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$]
Indem wir zeigen, dass für alle $a \in (A \cup B) \cap C$ auch $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ gilt.
Sei also $a \in (A \cup B) \cap C$
oder anders gesagt: $a \in (A \cup B)$ und $a \in C$.
Fallunterscheidung:
Fall 1: $a \in A$ (und $a \in C$)
Folglich: $a \in (A \cap C)$
Und somit (trivialerweise): $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Fall 2: $a \notin A$, aber $a \in (A \cup B) \cap C$
Dann muss: $a \in (B \cap C)$ gelten.
Und somit (trivialerweise): $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Damit ist die Aussage gezeigt (q.e.d).
Anmerkung: Da keine Anforderungen an die Mengen gestellt wurden, gilt die Aussage für beliebige A, B und C.

Aufgabe 1.3 (1,5 + 0,5 + 4 = 6 Punkte)
In dieser Aufgabe sind A, B, C beliebige Mengen.
a) Zeigen Sie: $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Orientieren Sie sich gerne Aufgabe 1.2.
b) Was folgt aus a) und Aufgabe 1.2?
c) Zeigen sie in ähnlichem Format: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Für alle Teilaufgaben gilt: Achten Sie bei Fallunterscheidungen darauf alle möglichen Fälle abzudecken!

Lösung 1.3
a) Zeigen wir nun $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$
indem wir zeigen, dass für alle $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ auch $a \in (A \cup B) \cap C$ gilt.
Fallunterscheidung:
Fall 1: $a \in (A \cap C)$ Also $a \in A$ und $a \in C$ und somit (trivialerweise) auch: $a \in (A \cup B) \cap C$
Fall 2: $a \in (B \cap C)$:
Also $a \in B$ und $a \in C$ und somit (trivialerweise) auch: $a \in (A \cup B) \cap C$
Damit ist $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ gezeigt. q.e.d
Anmerkung: Da keine Anforderungen an die Mengen gestellt wurden, gilt die Aussage für beliebige A, B und C.
b) Insgesamt haben wir: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, für beliebige Mengen A, B, C gezeigt.
c) Wir zeigen nun $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
nach dem gleichen Prinzip wie 1.2 und 1.3a).

Also zunächst: $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$
indem wir wieder zeigen, dass alle $a \in (A \cap B) \cup C$ auch $a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ gilt.
Sei also $a \in (A \cap B) \cup C$, so muss entweder gelten:
$a \in (A \cap B)$ (inklusive) oder: $a \in C$.
Was uns zu folgender Fallunterscheidung führt:
Fall 1: $a \in (A \cap B)$, also $a \in A$ und $a \in B$ und folglich auch $a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Fall 2: $a \in C$, dann gilt trivialerweise: $a \in (A \cup C)$ und $a \in (B \cup C)$ und somit auch: $a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Damit ist $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$ gezeigt.

Bleibt zu zeigen: $(A \cap B) \cup C \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$ [nach selbem Schema]
Sei also $a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, also $a \in (A \cup C)$ und $a \in (B \cup C)$.
Wieder betrachten wir zwei Fälle:
Fall 1: $a \in C$, dann natürlich auch: $a \in (A \cap B) \cup C$.
Fall 2: $a \notin C$, aber $a \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Dies setzt $a \in (A \cap B)$ vorraus. Also $a \in (A \cap B)$, und somit auch $a \in (A \cap B) \cup C$.
Damit ist $(A \cap B) \cup C \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$ gezeigt.
Insgesamt ist also $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ gezeigt. q.e.d.
Anmerkung: Da keine Anforderungen an die Mengen gestellt wurden, gilt die Aussage für beliebige A, B und C.

Aufgabe 1.4 (0,5 + 0,5 + 2 = 3 Punkte)

a) Geben Sie zwei Mengen A, B an, sodass gilt: $|A \cup B| < |A| + |B|$
b) Seien A, B beliebige Mengen mit $|A| = 5$ und $|B| = 10$. Geben sie $|A \times B|$ an.
c) Seien A, B beliebige, nichtleere Mengen.
Zeigen oder widerlegen Sie: $|(A \times B) \cup A| = |A \times B| + |A|$

Lösung 1.4

a) Jede Lösung, bei der A und B mindestens ein gemeinsames Element haben ist richtig. Beispiel: $A = \{a\}$, $B = \{a\}$
b) Es gilt $|A \times B = |A| \cdot |B|$, also hier: $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot 10 = 50$.
c) Die Aussage ist **im Allgemeinen falsch**! [Sprich: Gilt manchmal, aber nicht immer].
Da hier nach der Allgemeingültigkeit gefragt war, gilt die Aussage also nicht.
Dies lässt sich durch ein Gegenbeispiel zeigen, in dem $A \times B$ und A nicht disjunkt sind, also ein gemeinsames Element haben. Beispiel: $A = \{1, (1, 1)\}$, $B = \{1\}$. Hier ist $(A \times B) \cup A = \{1, (1, 1), ((1, 1), 1)\}$, mit $|(A \times B) \cup A| = 3 < 4 = |A \times B| + |A|$.

Aufgabe 1.5 (0,5 + 0,5 + 1 + 2 = 4 Punkte)

Sei A das deutsche Alphabet (siehe hier). In dieser Aufgabe betrachten wir sogenannte Tupelmengen M der folgenden Form: $M \subseteq A \times \mathbb{N}$. Diese Mengen haben die Möglichkeit, die Anzahl der Vorkommen eines bestimmten $x \in A$ als zweiten Wert des Tupels "zu speichern". Hierbei ist wichtig, dass in Tupelmengen keine zwei Elemente $(x, i), (y, j)$ mit $x = y$ vorkommen dürfen und für alle Elemente (x, i) einer Tupelmenge stets $i > 0$ gilt.
Beispiele:

- legale Tupelmengen: $\{\}$, $\{(a, 1), (b, 3)\}$
- illegale Tupelmengen: $\{(a, 0)\}$, sollte $\{\}$ sein. $\{(b, 1), (b, 3)\}$, sollte $\{(b, 4)\}$ sein.

Insofern sind die Mengenrelationen $\cup$, $\cap$ und $\setminus$ in ihrer ursprünglichen Definition für Tupelmengen nur begrenzt sinnvoll. Wir definieren neue Mengenrelationen durch Verwendung der Notation: $\{x \mid x$ erfüllt die hier aufgeführten Bedingungen$\}$.
Hierbei verwenden wir die Notation $(x, \_) \in M$, bzw. $(x, \_) \notin M$, um auszudrücken, ob in einer Tupelmenge M das Zeichen $x \in A$ mit beliebiger Anzahl vorkommt, bzw. nicht vorkommt.
Wir definieren zwei neue Mengenrelationen für beliebige Tupelmengen M, N:

- $M \cap' N := \{(x, min\{i, j\}) \mid (x, i) \in M, (x, j) \in N\}$
- $M - N := \{(x, i - j) \mid (x, i) \in M, (x, j) \in N, i > j\} \cup \{(x, i) \mid (x, i) \in M, (x, \_) \notin N\}$

a) Geben Sie $M \cap' N$ für $M = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 7)\}$ und $N = \{(a, 4), (b, 2)\}$ an.
b) Geben Sie $M - N$ für $M = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 7)\}$ und $N = \{(a, 4), (b, 2)\}$ an.
c) Definieren Sie die Relation $\cdot$, sodass $M \cdot N$ genau die in M und N vorkommenden $x \in A$ mit multipliziertem Vorkommen enthält. Das Ergebnis soll stets eine legale Tupelmenge sein! Beispiel: $\{(a, 1), (b, 2)\} \cdot \{(b, 3), (c, 4)\} = \{(b, 6)\}$
d) Definieren Sie die Relation $+$, sodass $M + N$ genau die Elemente der beiden Tupelmengen mit addiertem Vorkommen enthält. Das Ergebnis soll stets eine legale Tupelmenge sein! Beispiel: $\{(a, 1), (b, 2)\} + \{(b, 3), (c, 4)\} = \{(a, 1), (b, 5), (c, 4)\}$

Lösung 1.5

a) $M \cap' N = \{(a, 1), (b, 2)\}$
b) $M - N = \{(b, 1), (c, 3), (d, 7)\}$
c) $M \cdot N := \{(x, i \cdot j) \mid (x, i) \in M, (x, j) \in N\}$
d) $M + N := \{(x, i + j) \mid (x, i) \in M, (x, j) \in N\} \cup \{(x, i) \mid (x, i) \in M, (x, \_) \notin N\} \cup \{(x, j) \mid (x, j) \in N, (x, \_) \notin M\}$
In Worten (informell): Wenn $x \in A$ in beiden Tupelmengen vorkommt, wird die Anzahl addiert, wenn $x \in A$ nur in einer Tupelmenge vorkommt, wird die Anzahl übernommen.