Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 9

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium Nr.: Tutor*in:

Ausgabe: 13. Januar 2021

Abgabe: 26. Januar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9: / 17

Blätter 7 – 9: / 58

Aufgabe 9.1 (1.5 + 1 + 1 + 1 + 1.5 = 6 Punkte)
$\mathtt{R}$ sei ein zweistelliges Relationssymbol. Zudem seien die folgenden prädikatenlogischen Formeln gegeben:

$$F = \forall\mathtt{x}\,(\mathtt{R(x,y)} \rightarrow \mathtt{R(x,z)})$$
$$G = (\exists\mathtt{y}\; F) \rightarrow \forall\mathtt{y}\; F$$

a) Geben Sie eine Interpretation (D, I) sowie Variablenbelegungen β_1 und β_2 an, sodass $val_{D,I,\beta_1}(F) = \mathbf{w}$ und $val_{D,I,\beta_2}(F) = \mathbf{f}$ ist.
b) Geben Sie $\text{fv}(F)$, $\text{bv}(F)$, $\text{fv}(G)$ und $\text{bv}(G)$ explizit an.
c) Gibt es einen Term t, sodass $G \neq \sigma_{\mathtt{y}/t}(G)$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
d) Geben Sie die Formeln $G_1 = \sigma_{\mathtt{z}/\mathtt{x}}(G)$ und $G_2 = \sigma_{\mathtt{z}/\mathtt{y}}(G)$ explizit an.
e) Sind die Formeln G_1 und G_2 aus Teilaufgabe d) logisch äquivalent? Falls ja, erklären Sie, warum das so ist; andernfalls geben Sie eine Interpretation (D, I) sowie eine Variablenbelegung β, für die $val_{D,I,\beta}(G_1) \neq val_{D,I,\beta}(G_2)$ ist.

Aufgabe 9.2 (1 + 2 = 3 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Für $w \in A^*$ und $x \in A$ seien die Abbildungen $\text{rcar}, \text{rcdr}\colon A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\text{rcar}(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \text{rcdr}(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\text{rcar}(wx) = x \qquad \text{rcdr}(wx) = w$$

a) Was ist $\text{rcar}(\text{rcdr}^2(w))$, wenn $w \in A^*$ beliebig ist?
b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n, dass Folgendes gilt:
$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in A^n : \text{rcdr}^{|w|}(w) = \varepsilon$.

Aufgabe 9.3 (2 + 1.5 + 1.5 + 3 = 8 Punkte)
A, rcar und rcdr seien wie in Aufgabe 9.2. Zudem sei folgender Algorithmus B gegeben, der $x, y \in A^*$ mit $|x| = |y|$ als Eingabe bekommt und $z \in A^*$ als Ausgabe liefert, wobei w_x und w_y Variablen mit Wertebereich gleich A^* sind:

$z \leftarrow \varepsilon$
$w_x \leftarrow x$
$w_y \leftarrow y$
while $w_x \neq \varepsilon \wedge w_y \neq \varepsilon$ **do**
  $z \leftarrow \text{rcar}(w_x) \cdot \text{rcar}(w_y) \cdot z$
  $w_x \leftarrow \text{rcdr}(w_x)$
  $w_y \leftarrow \text{rcdr}(w_y)$
od

a) Für $i \in \mathbb{N}_+$ bezeichne x_i, y_i bzw. z_i den Wert der Variable w_x, w_y bzw. z unmittelbar nach der i-ten Ausführung der **while** Schleife in B. Führen Sie B für $x = \mathtt{abc}$ und $y = \mathtt{cba}$ aus und geben Sie x_i, y_i, und z_i für jedes $i \in \mathbb{N}_+$ tabellarisch an. Wird die Schleife echt weniger als i-mal ausgeführt, so müssen Sie nichts angeben.
b) Wird B für beliebige Eingaben x und y stets terminieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Welche Werte haben die Variablen w_x, w_y und z nach Ausführung von B im Allgemeinen?
Tipp. Aufgabe 4.1

d) Zeigen Sie mittels des Hoare-Kalküls, dass Ihre Antwort zu Teilaufgabe c) korrekt ist. Genauer: Angenommen, Sie haben bei Teilaufgabe c) s_x, s_y bzw. s_z als Werte für w_x, w_y bzw. z angegeben; zeigen Sie, dass das Hoare-Tripel

$$\{|x| = |y|\}\ B\ \{w_x = s_x \wedge w_y = s_y \wedge z = s_z\}$$

gültig ist.
Geben Sie vorweg explizit die Formel an, die Sie in Ihrem Beweis als Schleifeninvariante benutzen.
Tipp. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\forall w \in A^* : w = \mathrm{rcdr}(w)\mathrm{rcar}(w)$ gilt.