Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 23. Dezember 2020

Abgabe: 19. Januar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 19
Blätter 7 – 8:	/ 41

Aufgabe 8.1 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Es sei F die Menge der Fahrräder, M die der Motorräder, und $D = F \cup M$. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) „Jedes Fahrrad hat mindestens 2 Räder."
b) „Jedes Element aus D ist entweder ein Fahrrad oder ein Motorrad."
c) „Wenn etwas kein Motorrad ist aber mindestens 2 Räder hat, dann ist es ein Fahrrad."

Versehen Sie alle Relationssymbole, die in Ihren Formalisierungen vorkommen, mit einer passenden Interpretation, sodass der Bezug zu F, M, und D offensichtlich ist.

Aufgabe 8.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Es sei M eine nichtleere Menge und $R, S \subseteq M \times M$ Relationen auf M.

a) Zeigen Sie: Wenn R und S beides linkstotal sind, dann ist auch $S \circ R$ linkstotal.
b) Zeigen Sie: Wenn $S \circ R$ linkstotal ist, dann muss R linkstotal sein.
c) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $S \circ R$ linkstotal ist, dann muss S linkstotal sein.

Aufgabe 8.3 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Es sei folgende prädikatenlogische Formel gegeben:

$$F = \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, (\mathtt{S(x)} \to (\mathtt{S(y)} \vee \mathtt{R(x,y)}))\,.$$

a) Geben Sie ein Modell (D, I) von F an, das weder Modell von $G = \forall \mathtt{x}\, \mathtt{S(x)}$ noch von $G' = \forall \mathtt{x}\, \neg \mathtt{S(x)}$ ist.
b) Ist F zur Formel $H = \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, (\mathtt{S(y)} \to (\mathtt{S(x)} \vee \mathtt{R(x,y)}))$ logisch äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Ist F allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.4 (2 + 1 + 1 + 6 = 10 Punkte)
Es seien $\mathtt{S}$ und $\mathtt{T}$ einstellige Relationssymbole, und für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei $\mathtt{R}_i$ ein zweistelliges Relationssymbol sowie F_i die prädikatenlogische Formel

$$F_i : \quad \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, ((\mathtt{S(x)} \wedge \mathtt{T(y)}) \to \mathtt{R}_i\mathtt{(x,y)})\,.$$

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für jedes $w \in A^+$ und jedes i wird eine Interpretation (D_w, I_w) durch $D_w = \mathbb{Z}_{|w|}$, $I_w(\mathtt{S}) = \{y \in D_w \mid w(y) = \mathtt{a}\}$, $I_w(\mathtt{T}) = \{y \in D_w \mid w(y) = \mathtt{b}\}$, und $I_w(\mathtt{R}_i)$ wie folgt festgelegt:

(i) $I_w(\mathtt{R}_1) = \{(x, y) \in D_w \times D_w \mid x \leq y\}$
(ii) $I_w(\mathtt{R}_2) = \{(x, y) \in D_w \times D_w \mid x \neq y\}$
(iii) $I_w(\mathtt{R}_3) = \{(x, y) \in D_w \times D_w \mid x + y \text{ gerade}\}$.

Da die Formeln F_i keine freien Variablen enthalten, kann eine Variablenbelegung β beliebig gewählt werden. Wir sagen, ein Wort $w \in A^+$ ist *Modell* von F_i, wenn gilt: $val_{D_w, I_w, \beta}(F_i) = \mathbf{w}$.

a) Geben Sie für $w = \mathtt{abb}$ explizit $I_w(\mathtt{S})$, $I_w(\mathtt{T})$, $I_w(\mathtt{R}_1)$, $I_w(\mathtt{R}_2)$ und $I_w(\mathtt{R}_3)$ an.
b) Geben Sie an, für welche $i \in \{1, 2, 3\}$ das Wort $w = \mathtt{abb}$ Modell der Formel F_i ist.
c) Wenn für ein i das Wort w nicht Modell von F_i ist, geben Sie eine Variablenbelegung β an, die zur Interpretation (D_w, I_w) passt und für die gilt:

$$val_{D_w, I_w, \beta}((\mathtt{S(x)} \wedge \mathtt{T(y)}) \to \mathtt{R}_i\mathtt{(x,y)}) = \mathbf{f}.$$

d) Geben Sie für jedes i jeweils die Sprache $L_i \subseteq A^+$ explizit an, die genau jedes Wort $w \in A^+$ enthält, die Modell von F_i ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.