Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 6

Tutorium Nr.: Tutor*in:

Matr.nr. 1:

Nach-,Vorname 1: ,

Matr.nr. 2:

Nach-,Vorname 2: ,

Ausgabe: 9. Dezember 2020

Abgabe: 22. Dezember 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 6: / 23 Blätter 1 – 6, Stud. 1: / 120

Blätter 1 – 6, Stud. 2: / 120

Aufgabe 6.1 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}\}$ und $B = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$.

a) Erstellen Sie einen Huffman-Baum zum Wort $w = \texttt{ccdbdaacdb} \in A^*$. Geben Sie anschließend die Codierung $H(w)$ von w anhand des zu Ihrem Baum zugehörigen Huffman-Codes H.

b) Das Codewort $c = H(w)$ wird auf einem störungsbehafteten Kanal übertragen, sodass genau ein Bit des Wortes c an einer zufälligen Position i gekippt ist. Der Empfänger erhält also ein Wort $c' \in B^*$ mit $|c'| = |c|$ und so, dass es ein $i \in \mathbb{Z}_{|c|}$ derart gibt, dass $c(i) \neq c'(i)$ und $\forall j \in \mathbb{Z}_{|c|} \setminus \{i\} : c'(j) = c(j)$ ist.
Kann der Empfänger nur anhand von H und c' stets eindeutig bestimmen, welches Wort w ursprünglich versendet worden ist? Falls ja, begründen Sie, warum das sein muss. Andernfalls geben Sie ein solches c' sowie unterschiedliche Wörter $w_1, w_2 \in A^*$ derart an, dass c' sowohl $H(w_1)$ als auch $H(w_2)$ entsprechen kann.

c) Man nehme jetzt an, dass wir $c = \pi(H(w))$ statt $H(w)$ auf dem Kanal übertragen, wobei $\pi\colon \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ der Homomorphismus ist, der durch $\pi(\texttt{0}) = \texttt{000}$ und $\pi(\texttt{1}) = \texttt{111}$ induziert wird. Dazu sei c' wie in Teilaufgabe b).
Kann der Empfänger nur anhand von H, π, und c' stets eindeutig bestimmen, welches Wort w ursprünglich versendet worden ist? Falls ja, begründen Sie, warum das sein muss. Andernfalls geben Sie ein solches c' sowie unterschiedliche Wörter $w_1, w_2 \in A^*$ derart an, dass c' sowohl $H(w_1)$ als auch $H(w_2)$ entsprechen kann.

Aufgabe 6.2 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)

Es sei $A = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ und and, or, xor: $A \times A \to A$ die in der Übung vorgestellten binären Operationen. Zudem sei für $c \in A$ die Abbildung $P_c\colon A^* \times A^* \to A^*$ wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{aligned} \forall w \in A^* : &\qquad P_c(w, \varepsilon) = P_c(\varepsilon, w) = \varepsilon \\ \forall w_1, w_2 \in A^*\ \forall x_1, x_2 \in A : &\qquad P_c(w_1 x_1, w_2 x_2) = P_{c'}(w_1, w_2) \cdot \operatorname{xor}(c, \operatorname{xor}(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

wobei $c' = \operatorname{or}(\operatorname{and}(x_1, x_2), \operatorname{and}(c, \operatorname{or}(x_1, x_2)))$ ist.

a) Rechnen Sie $P_0(\texttt{101}, \texttt{001})$ schrittweise aus. Wenden Sie dabei bei jedem Schritt die Definition von P_c höchstens einmal an.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig. Zeigen Sie, dass genau dann $P_0(\texttt{1}^n, \texttt{0}^{n-1}\texttt{1}) = \texttt{0}^n$ ist, wenn $P_1(\texttt{1}^{n-1}, \texttt{0}^{n-1}) = \texttt{0}^{n-1}$ gilt.

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über m, dass Folgendes gilt:

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \ P_1(\texttt{1}^m, \texttt{0}^m) = \texttt{0}^m.$$

Aufgabe 6.3 (0.5 + 0.5 + 2 = 3 Punkte)

a) Geben Sie $\operatorname{Zkpl}_\ell(3)$ für jedes $\ell \in \{3, 4, 5\}$ an.

b) Geben Sie $\operatorname{Zkpl}_\ell(-4)$ für jedes $\ell \in \{3, 4, 5\}$ an.

c) Es sei $A = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ und $\ell \in \mathbb{N}_+$, $\ell \geq 1$. Geben Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine Abbildung $\ddot{U}_k\colon A^\ell \to A^{\ell+k}$ an, sodass für jedes $x \in \mathbb{K}_\ell$ gilt: $\ddot{U}_k(\operatorname{Zkpl}_\ell(x)) = \operatorname{Zkpl}_{\ell+k}(x)$.
Bei Ihrer Definition von $\ddot{U}_k$ darf dabei keine der Abbildungen Zkpl, bin, Repr, und Num vorkommen.
Begründen Sie anschließend, warum Ihr $\ddot{U}_k$ das Geforderte leistet. Einen Beweis müssen Sie nicht erbringen; eine plausible Begründung genügt.

Aufgabe 6.4 (1.5 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0.5 = 7 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie kennengelernt, dass die MIMA ausschließlich mit Zahlen in Zweierkomplementdarstellung arbeitet. Nichtsdestotrotz werden wir in dieser Aufgabe sehen, wie man eine geschickte Übersetzung definieren kann, sodass sich auch Zeichenketten im MIMA-Speicher repräsentieren und von der MIMA verarbeiten lassen.

Zu diesem Zweck seien $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $B = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ Alphabete, $\perp = \mathtt{0}^{24}$ das sogenannte *Nullzeichen*, und $z_\mathtt{a}, z_\mathtt{b} \in B^{24} \setminus \{\perp\}$ zwei beliebige Zweierkomplementdarstellungen, die unterschiedlich sind (also $z_\mathtt{a} \neq z_\mathtt{b}$). Damit definieren wir eine Übersetzung $\ddot{U}\colon A^* \to \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} (B^{24})^{\mathbb{Z}_m}$, die durch folgende Eigenschaft gegeben ist: Für $w \in A^*$ ist $f_w = \ddot{U}(w)$ genau die Abbildung, für die gilt:

1. $f_w \in (B^{24})^{\mathbb{Z}_{|w|+1}}$, das heißt, f_w ist eine Abbildung von $\mathbb{Z}_{|w|+1}$ nach B^{24}.
2. Für jedes $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ gilt $f_w(i) = z_x$ genau dann, wenn $w(i) = x$ ist.
3. $f(|w|) = \perp$.

Gehen Sie davon aus, dass der Inhalt aller Speicherstellen unbekannt ist, es sei denn, dieser wird unten explizit angegeben.

a) Geben Sie $\ddot{U}(w)$ für jedes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{abb}, \varepsilon\}$ explizit an.

b) Es seien $w_1, w_2 \in A^*$. Geben Sie den Wert $\ddot{U}(w_1 w_2)(i)$ für jedes $i \in \mathbb{Z}_{|w_1|+|w_2|+1}$ an.

Sei $s \in \mathbb{N}_0$ und $s \leq 2^{20} - |w|$. Wir sagen, ein Wort $w \in A^*$ ist an Adresse $a = \mathrm{bin}_{24}(s)$ *gespeichert*, wenn es für jedes $i \in \mathbb{Z}_{|w|+1}$ gilt, dass der Wert an Adresse $a_i = \mathrm{bin}_{24}(s+i)$ des Speichers gleich $f_w(i)$ ist.

c) Das Wort $w = \mathtt{ababa}$ sei an Adresse $\mathrm{bin}_{24}(2)$ gespeichert. Füllen Sie die folgende Tabelle mit dem Inhalt des Speichers für jede der Adressen aus, die unten aufgeführt sind. Sollte der Inhalt unbekannt sein, tragen Sie dann ein Fragezeichen „?" ein.

Adresse	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
Inhalt										

Hinweis. Bei der Tabelle haben wir bei den Adressen führende Nullen weggelassen. Sie dürfen das auch.

d) Das Wort $w = \mathtt{ababa}$ sei weiterhin an Adresse $a = \mathrm{bin}_{24}(2)$ gespeichert. Nehmen wir jetzt an, durch Ausführung eines MIMA-Programms werde der Inhalt des Speichers an Adresse

(i) $\mathrm{bin}_{24}(5)$ (ii) $\mathrm{bin}_{24}(6)$ (iii) $\mathrm{bin}_{24}(7)$ (iv) $\mathrm{bin}_{24}(8)$

durch den Wert $z_\mathtt{b}$ überschrieben. Der Inhalt aller anderen Speicherzellen bliebe unverändert.

Geben Sie für jeden der obigen Fälle an, ob das Wort w weiterhin an Adresse a gespeichert ist. Falls das nicht zutrifft, geben Sie explizit das Wort an, das an Adresse a gespeichert ist; sollte dieses Wort nicht eindeutig sein bzw. nach Ausführung des Programms an Adresse a ggf. nicht unbedingt ein Wort stehen, erklären Sie, warum das der Fall ist.

e) Es sei $w \in A^+$ wieder beliebig sowie $s \in \mathbb{N}_0$, $s \leq 2^{20}$, und $a = \mathrm{bin}_{24}(s)$. Wenn w an Adresse a gespeichert ist, ist dann an Adresse $a' = \mathrm{bin}_{24}(s+1)$ auch ein Wort gespeichert? Wenn ja, geben Sie dieses Wort an; andernfalls begründen Sie, warum an Adresse a' nicht unbedingt ein Wort steht.

f) Lautet Ihre Antwort zu e) immer noch dieselbe, wenn $w \in A^*$ ist? Begründen Sie.

Aufgabe 6.5 (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um MIMA-Befehle, die den Kontrollfluss der Maschine steuern. Den Inhalt des Speichers dürfen Sie dabei nicht verändern.

a) Der MIMA-Befehlssatz soll um den Sprung-Befehl `JGEZ` a erweitert werden. Dabei wird der Sprung zu Adresse a genommen falls der Wert, der im Akkumulator steht, die Zweierkomplementdarstellung einer Zahl ≥ 0 ist.
   Geben Sie eine Folge von höchstens 3 Befehlen an, die den Befehl `JGEZ` a realisiert. Ihre Befehlsfolge muss dabei mit dem Befehl `JMN` a enden. Sie dürfen keine andere Sprungbefehle verwenden. Erklären Sie anschließend, warum Ihre Befehlsfolge das Geforderte leistet.

b) Angenommen, der Wert im Akkumulator ist die Zweierkomplementdarstellung einer positiven Zahl x. Zudem ist an Adresse c_1 der Wert $\text{Zkpl}_{24}(1)$ gespeichert.
   Es sei eine Adresse a gegeben, für die $a \neq c_1$. Geben Sie eine Folge von höchstens 4 Befehlen an, sodass genau dann einen Sprung zu a genommen wird, wenn $x = 0$ ist. Sie dürfen hierbei höchstens einen Sprungbefehl verwenden, wobei der eben definierte Befehl `JGEZ` a auch zulässig ist und als ein Befehl zählt. Erklären Sie anschließend, warum Ihre Befehlsfolge das Geforderte leistet.

Hinweis. Lösungen, die mit keiner Erklärung versehen sind, werden mit 0 Punkten bewertet.