Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
3. September 2020

Nachname:							
Vorname:							
Matr.-Nr.:							

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte `sehr gut lesbar` ausfüllen:

Email-Adr.:
Postanschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	6	6	9	6	6	5
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 45		Note:	

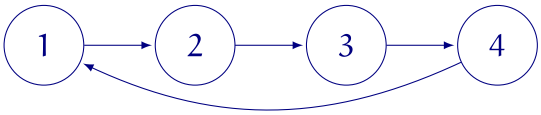
/ 7

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

/ 1

a) Geben Sie (formal oder als Bild) einen streng zusammenhängenden und gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit mindestens 4 Knoten (also $|V| \geq 4$) an, dessen Anzahl Kanten *minimal* ist (d. h., ist $G' = (V', E')$ ebenfalls ein streng zusammenhängender und gerichteter Graph mit $|V'| = |V|$, dann ist $|E'| \geq |E|$):

Z. B. der folgende Graph:



/ 1

b) Es sei $X = \{a, b\}$. Wie viele Sprachen $L \subseteq X^*$ gibt es, sodass L^* endlich ist? Wenn Ihre Antwort eine endliche Zahl ist, geben Sie noch alle solchen Sprachen an.

Zwei, nämlich $L = \emptyset$ und $L = \{\varepsilon\}$

/ 1

c) Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, X, P)$ mit $N = \{X, Y\}$, $T = \{a, b\}$, und $P = \{X \to aYb, Y \to aY, Y \to \varepsilon\}$. Geben Sie Produktionen p_1 und p_2 an, sodass die Grammatik $G' = (N, T, X, P')$ mit $P' = P \cup \{p_1, p_2\}$ die Sprache $L(G') = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$ erzeugt:

$p_1 =$ $X \to Y$

$p_2 =$ $Y \to Yb$

/ 2

d) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ beschreibt, für die gilt: „Vor jedem b steht höchstens ein a und nach jedem b steht höchstens ein weiteres b."

R = `a*|(b|ab)a*|(b|ab|ba)ba*` oder `(∅*|b|ab|bb|abb|bab)a*`

oder ...

/ 2

e) Es sei $\mathrm{id}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ die Abbildung mit $\mathrm{id}(n) = n$. Geben Sie zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

1. $f \notin \Theta(\mathrm{id})$, 2. $g \notin \Theta(\mathrm{id})$, 3. $g \notin \Theta(f)$, und 4. $f \circ g \in \Theta(g \circ f)$.

Begründen Sie kurz, warum Bedingung 4. erfüllt ist.

$f(n) =$ n^2

$g(n) =$ n^3

Begründung:

$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = (n^3)^2 = n^6 = (n^2)^3 = g(f(n)) = (g \circ f)(n)$

/ 6

Aufgabe 2 (1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Zudem sei $d\colon A^* \times A^* \to \mathbb{N}_0$ eine Abbildung, die für alle $u, v \in A^*$ und $x, y \in A$ wie folgt induktiv definiert ist:

$$d(u, \varepsilon) = d(\varepsilon, v) = 0 \qquad \text{und} \qquad d(xu, yv) = \begin{cases} 1 + d(u, v), & \text{falls } x = y \\ d(u, v), & \text{sonst} \end{cases} .$$

/ 1

a) Berechnen Sie schrittweise $d(\mathtt{abab}, \mathtt{bbbb})$:

$$\begin{aligned} d(\mathtt{abab}, \mathtt{bbbb}) &= d(\mathtt{bab}, \mathtt{bbb}) \\ &= 1 + d(\mathtt{ab}, \mathtt{bb}) \\ &= 1 + d(\mathtt{b}, \mathtt{b}) \\ &= 1 + 1 + d(\varepsilon, \varepsilon) = 2 \end{aligned}$$

Es sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Zudem sei für $r \in \mathbb{N}_0$ und $w \in A^n$ die Menge $B_r(w)$ wie folgt definiert:

$$B_r(w) = \{w' \in A^n \mid d(w, w') \leq r\}$$

Hinweis. Die w' in $B_r(w)$ haben die gleiche Länge wie w.

/ 1

b) Geben Sie alle Wörter in $B_2(\mathtt{bba})$ explizit an:

$\{\mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bbb}, \mathtt{aaa}, \mathtt{abb}, \mathtt{bab}\} = A^3 \setminus \{\mathtt{bba}\}$

/ 2

c) Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $w \in A^n$ beliebig. Geben Sie alle $w' \in B_0(w)$ an:

nur das (eindeutige) Wort $w' \in A^n$ mit $w'(i) = \mathtt{a} \iff w(i) = \mathtt{b}$

Es seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ beliebig und C eine Abbildung $C\colon A^m \to A^n$.

/ 1

d) Welcher Beziehung besteht zwischen m und n, wenn C eine bijektive Abbildung ist? $m = n$

Es sei nun $C\colon A^m \to A^n$ eine bijektive Abbildung. Eine zugehörige Relation $D \subseteq A^n \times A^m$ sei wie folgt gegeben: $(w, w') \in D$ gdw. $w \in B_0(C(w'))$

/ 1

e) Welche der vier folgenden Eigenschaften

1. linkstotal, 2. rechtstotal, 3. linkseindeutig, 4. rechtseindeutig

hat D: alle

/ 6

Aufgabe 3 (3 + 3 = 6 Punkte)

/ 3

a) Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln mit den aussagenlogischen Variablen $\mathtt{P}$, $\mathtt{Q}$, und $\mathtt{R}$:

- F_1: $\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \to \mathtt{P})$
- F_2: $\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \to \mathtt{R})$
- F_3: $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}$

Geben Sie für $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ jeweils an, ob F_i und F_j logisch äquivalent sind. Sollte das *nicht* der Fall sein, geben Sie noch eine Interpretation I an, für die $val_I(F_i) \neq val_I(F_j)$ gilt.

F_1, F_2: nein: $I(\mathtt{P}) = I(\mathtt{Q}) = \mathbf{w}$ und $I(\mathtt{R}) = \mathbf{f}$

F_1, F_3: nein: $I(\mathtt{P}) = I(\mathtt{R}) = \mathbf{f}$ und $I(\mathtt{Q})$ beliebig

oder $I(\mathtt{P}) = I(\mathtt{Q}) = \mathbf{w}$ und $I(\mathtt{R}) = \mathbf{f}$

F_2, F_3: nein: $I(\mathtt{P}) = I(\mathtt{R}) = \mathbf{f}$ und $I(\mathtt{Q})$ beliebig

/ 3

b) Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Ist eine Formel F entweder eine Tautologie oder unerfüllbar, so ist $F \to F$ eine Tautologie.

(ii) Ist eine Formel F entweder eine Tautologie oder unerfüllbar, so ist $(F \vee F) \to (F \wedge F)$ eine Tautologie.

(iii) Eine Formel F ist genau dann unerfüllbar, wenn $(\neg F) \to F$ eine Tautologie ist.

Lösung 3

b) (i) Ja, denn $val_I(F \to F) = val_I(\neg F \vee F) = \mathbf{w}$ gilt für jede Interpretation I, egal ob $val_I(F) = \mathbf{w}$ oder $val_I(F) = \mathbf{f}$ ist.

(ii) Ja, weil $(F \vee F) \to (F \wedge F) \equiv F \to (F \wedge F) \equiv F \to F$ wie in (i) gezeigt eine Tautologie ist (und die logische Äquivalenz erhält die Eigenschaft, eine Tautologie zu sein).

(iii) Nein, denn $(\neg F) \to F \equiv F \vee F \equiv F$ und F kann nicht gleichzeitig unerfüllbar und Tautologie sein.

/ 9

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 + 4 = 9 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um gerichtete Graphen $G = (V, E)$ (mit endlicher Knotenmenge V).

Zur Erinnerung: Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist E^k die Relation auf V, die alle Knotenpaare (x, y) enthält, für die gilt: Es gibt einen Pfad in G der Länge k von x nach y. Formal also:

$$E^0 = \{(x, x) \mid x \in V\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \colon E^{k+1} = \{(x, z) \mid \exists y \in V : (x, y) \in E^k \text{ und } (y, z) \in E\}$$

Ferner sei für $k \in \mathbb{N}_0$ der Graph G^k durch $G^k = (V, E^k)$ definiert.

/ 2

a) Es sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4)\}$. Geben Sie G^0, G^1, G^2, und G^3 an (als Bilder oder formal). Beschriften Sie alle Knoten.

Es sei nun $G = (V, E)$ ein *beliebiger* gerichteter Graph.

/ 2

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Einträgen in den Wegematrizen von G und G^2? Begründen Sie Ihre Antwort.

/ 1

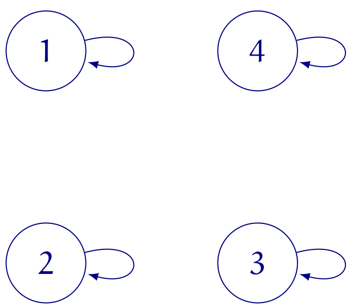
c) Geben Sie (als Bild oder formal) einen *streng zusammenhängenden* Graphen H an, sodass es keinen Graphen J mit $H = J^2$ gibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

/ 4

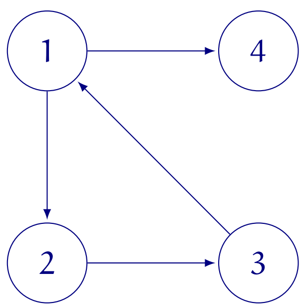
d) Es sei $m \in \mathbb{N}_+$ so gewählt, dass der Ausgangsgrad jedes Knotens $x \in V$ kleiner oder gleich m ist. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$: In G^k ist der Ausgangsgrad jedes Knotens höchstens m^k.

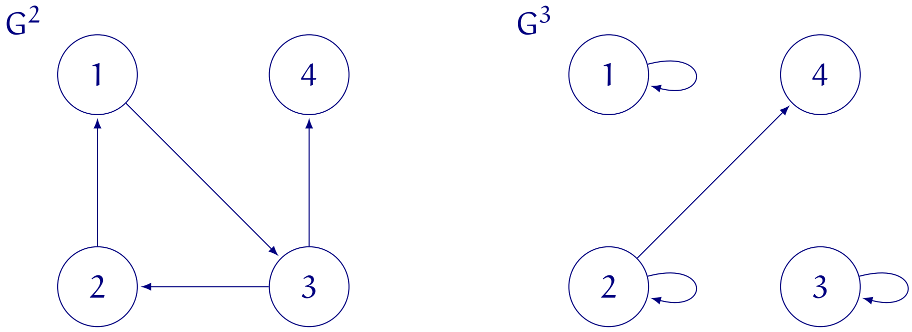
Lösung 4

a) G^0



G^1





b) Wenn ein Eintrag in der Wegematrix von G^2 eine 1 ist, dann steht in der Wegematrix von G an der selben Stelle auch eine 1. Das gilt, weil $(E^2)^* \subseteq E^*$ ist (und die Wegematrix eines Graphen $G = (V, E)$ lediglich die Matrixdarstellung der jeweiligen reflexiv-transitiven Hülle E^* ist).

c) Z. B. der Graph $H = (V, E)$ mit $V = \{1, 2\}$ und $E = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Ist ein Graph J^2 schlingenfrei, so ist auch J schlingenfrei. Damit müsste ein Graph J mit $J^2 = H$ schlingenfrei sein und einen Pfad in J der Länge 2 von 1 nach 2 (bzw. von 2 nach 1) enthalten. Das kann aber nie der Fall sein.

d) IA: Für $k = 0$ ist in $G^k = G^0$ der Ausgangsgrad jedes Knoten genau gleich $1 = m^0$.

IS: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es gelte die

IV: In G^k ist der Ausgangsgrad jedes Knoten höchstens m^k.

Dazu beobachten wir, dass (da eben gerichtete Graphen vorliegen) für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ der Ausgangsgrad von v in G^i gleich der Anzahl (verschiedener) Paare $(v, u) \in E^i$ ist.

Es sei jetzt $x \in V$. Jedes $y \in V$ mit $(x, y) \in E^k$ hat (nach Annahme) Ausgangsgrad höchstens m in G. Also für jedes solche y haben wir höchstens m viele Paare $(x, z) \in E^{k+1}$ für die $(y, z) \in E$ ist. Nach der IV gibt es höchstens m^k viele $y \in V$, sodass $(x, y) \in E^k$ ist. Damit gibt es insgesamt höchstens $m^k \cdot m = m^{k+1}$ viele Paare $(x, z) \in E^{k+1}$ überhaupt, das heißt, x hat Ausgangsgrad höchstens m^{k+1}.

Da x beliebig gewählt war, so folgt die Aussage.

/ 6

Aufgabe 5 (1 + 1 + 1 + 3 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$ und $G = (N, A, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S, X, Y\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to aXb \mid aaS \mid Yb, \\ & X \to aSb, \\ & Y \to Sb \mid b\}. \end{aligned}$$

/ 1

a) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für ein Wort $w \in L(G)$ der Länge $|w| \geq 6$.

/ 1

b) Geben Sie eine *rechtslineare* Grammatik $G' = (N', A, S', P')$ mit höchstens 2 Nichtterminalsymbolen (also $|N'| \leq 2$) an, sodass $L(G) = L(G')$ ist.

/ 1

c) Wann heißt eine Abbildung $h \colon A^* \to A^*$ ein *Homomorphismus*?

Wenn für alle $x, y \in A^*$ gilt: $h(xy) = h(x)h(y)$.

/ 3

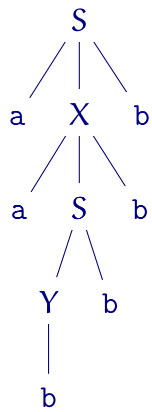
d) Gibt es einen endlichen Akzeptor E sowie einen Homomorphismus $h \colon A^* \to A^*$, sodass $w \in L(E)$ genau dann gilt, wenn $h(w) \in L(G)$ ist?

Falls ja: Geben Sie solche E und h an.

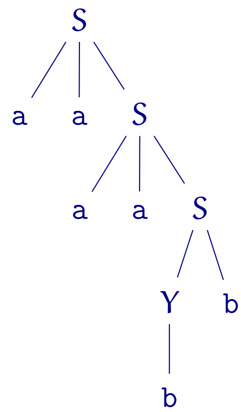
Falls nein: Begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann.

Lösung 5

a) zum Beispiel

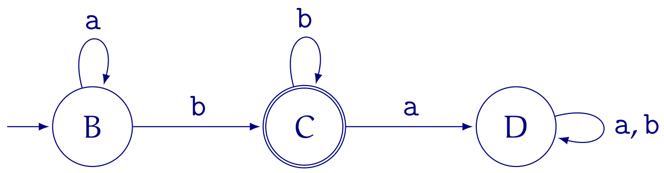


oder



b) $N' = \{B, C\}$, $S' = B$, und $P' = \{B \to aaB \mid bbC, C \to bbC \mid \varepsilon\}$

d) Ja, z. B. h so, dass $h(a) = aa$ und $h(b) = bb$, und E der folgende endliche Akzeptor (mit $L(E) = \{a\}^*\{b\}^+$):



/ 6

Aufgabe 6 (2 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A^{\leq n} = \bigcup_{i=0}^{n} A^i$.

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen endlichen Automaten B_n wie folgt:

- die Zustandsmenge Q ist gleich $A^{\leq n}$
- der Startzustand ist ε
- das Eingabealphabet ist A
- die Zustandsüberführungsfunktion $f\colon Q \times A \to Q$ ist für $w \in A^*$ und $x \in A$ wie folgt festgelegt:

$$f(w, x) = \begin{cases} wx, & \text{falls } |w| < n \\ w, & \text{falls } |w| = n \end{cases}$$

/ 2

a) Zeichnen Sie B_0, B_1, und B_2. Kennzeichnen Sie den Startzustand deutlich und beschriften Sie alle Zustände und Zustandsübergänge.

Hinweis. Gehen Sie für diese Teilaufgabe davon aus, dass es *keine* akzeptierenden Zustände gibt.

/ 1

b) Wie viele Zustände besitzt B_n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$? In Ihrer Antwort darf kein $\sum$-Zeichen vorkommen.

Antwort: $2^{n+1} - 1$

Hinweis. In den beiden letzten Teilaufgaben geht es nun auch um akzeptierende Zustände.

/ 1

c) Geben Sie für den Automaten B_2, den Sie in Teilaufgabe a) angegeben haben, eine Menge akzeptierender Zustände $F \subseteq Q$ an, sodass $L(B_2)$ gleich der Sprache aller Wörter ist, die entweder mit einem $\mathtt{a}$ oder mit $\mathtt{bb}$ anfangen: $F =$ $\{\mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{bb}\}$

/ 2

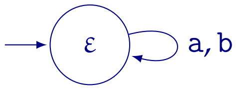
d) Es sei $n \geq 1$ und es seien C und D endliche Akzeptoren, die vom Aufbau her zu B_n identisch sind. Die Menge akzeptierender Zustände von C heiße $F_C \subseteq Q$ und die Menge akzeptierender Zustände von D heiße F_D.

Angenommen, es ist $F_D = F_C \cup \{q\}$ für einen Zustand $q \in Q = A^{\leq n}$, und angenommen, R_C ist ein regulärer Ausdruck, sodass $\langle R_C \rangle = L(C)$ ist.

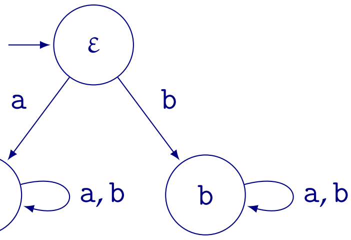
Beschreiben Sie den Aufbau eines regulären Ausdrucks R_D, sodass $\langle R_D \rangle = L(D)$ ist.

Lösung 6

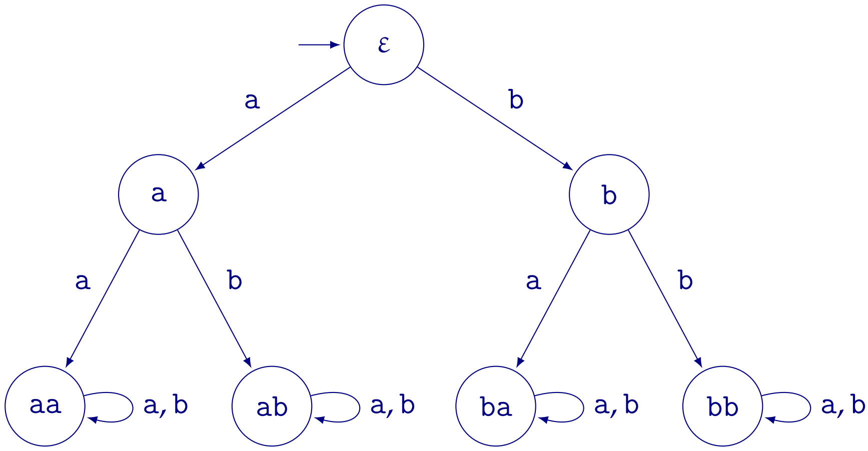
a) B_0



B_1



B_2



d) R_D sei in Abhängigkeit von q wie folgt:

$$q = \varepsilon\text{:}\ \ R_D = R_C\,|\,\emptyset*$$

$$0 < |q| < n\text{:}\ \ R_D = R_C\,|\,q$$

$$|q| = n\text{:}\ \ R_D = R_C\,|\,q\,(a\,|\,b)*$$

/ 5 **Aufgabe 7 (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)**

Es sei T eine Turing-Maschine mit Zustandsmenge Q, Bandalphabet Y, Eingabealphabet $X \subseteq Y \setminus \{\Box\}$, und Zustandsüberführungsfunktion f. Ferner sei $F \subseteq Q$ die Menge akzeptierender Zustände von T.

/ 2

a) Vervollständigen Sie die Definitionen:

- f ist eine | partielle | Funktion

  mit Definitionsbereich gleich | $Q \times Y$ |

  und Bildbereich gleich | Q | .

Angenommen, T befindet sich aktuell im Zustand $q \in Q$ und liest das Symbol $y \in Y$.

- Man sagt, T hat *angehalten*,

  wenn | $f(q, y)$ undefiniert ist | .

- Man sagt, T hat *akzeptiert*,

  wenn | T angehalten hat |

  und | $q \in F$ ist | .

/ 2

b) Es sei S eine Turing-Maschine mit gleichem Q, Y und f wie bei T, aber die Menge akzeptierender Zustände von S sei gleich $F' = Q \setminus F$. (F ist die Menge akzeptierender Zustände von T.)

Zeigen oder widerlegen Sie: Dann gilt stets $L(S) = X^* \setminus L(T)$.

/ 1

c) Zusätzlich zu den Annahmen aus Teilaufgabe b) gelte nun auch noch: Der Schreib-Lese-Kopf von T bewegt sich nur nach rechts (oder T hält an).

Zeigen oder widerlegen Sie: Dann gilt stets $L(S) = X^* \setminus L(T)$.

Hinweis. Wenn Sie beide Behauptungen aus b) und c) widerlegen, müssen Sie nicht dieselben Maschinen T und S bei beiden Teilaufgaben verwenden, aber Sie dürfen.

Lösung 7

b) Die Behauptung ist **falsch**. Ein Gegenbeispiel ist die folgende Turingmaschine T mit Eingabealphabet $X = \{a\}$, für die $L(T) = L(S) = \varnothing$ gilt (weil T für keine Eingabe anhält):

c) Die Behauptung ist ebenfalls **falsch** (mit dem Gegenbeispiel von eben).