Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 12
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 17. Januar 2020

Abgabe: 28. Januar 2020, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

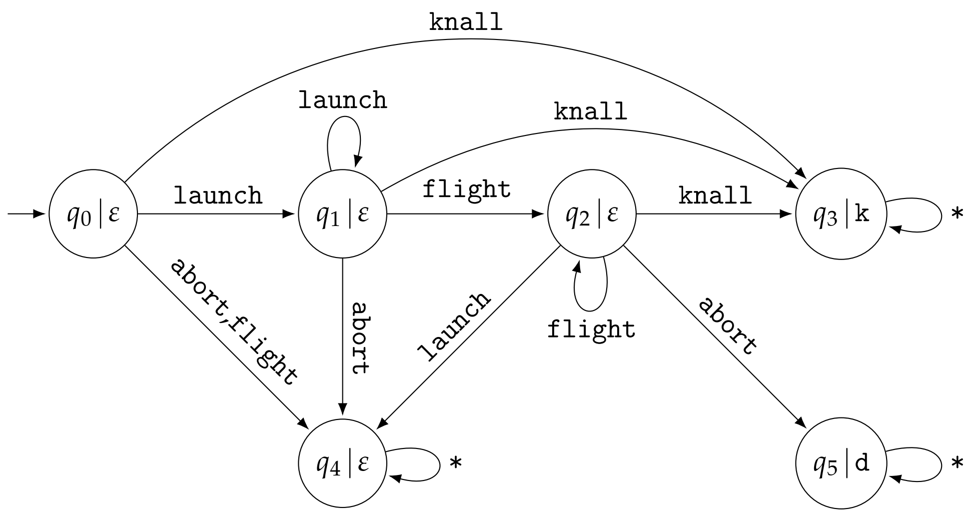
Blatt 12:	/ 19
Blätter 7 – 12:	/ 120

Aufgabe 12.1 (1 Punkt)
Nennen Sie die Nachnamen von sechs toten Wissenschaftlern, die im Laufe der Vorlesung auf Folien erwähnt wurden (oder noch erwähnt werden).

Lösung 12.1
Z. B.: al-Khwārizmī, Boole, Cantor, Euler, Gödel, Kleene, Leibniz, Łukasiewicz, Mealy, Moore, Radó, Steinbuch, Turing, von Neumann

Aufgabe 12.2 (Faschingsaufgabe: 2 + 2 = 4 Punkte)
Das Elend kennt kein Ende: Der ebenso supergeniale wie fürchterliche Superbösewicht Doktor Meta ist wieder da! Nachdem er sich letztes Jahr eine unbewohnte Insel in der Karibik mit fragwürdigen Methoden ergattert und sie zu seiner Operationsbasis ausgebaut hat, gelang es ihm und seinen Handlangern unbemerkt in der Silvesternacht den ersten Test einer Konfetti-Rakete durchzuführen, die mit bösem extra klebrigem Konfetti beladen war. Beinahe wäre der Test völlig geheim geblieben. Zum Glück hatte aber Theorie-Man, Doktor Metas hartnäckiger Widersacher, hochmoderne Sensoren in der unmittelbaren Nähe der KIT-Mensa strategisch platziert und konnte so den Aufbau des Flugkörpers noch vor dessen Selbstvernichtung fast millimetergenau erfassen.

Laut Theorie-Mans Sensordaten (deren Analyse leider schon viel wertvolle Zeit in Anspruch genommen hat) ist die Raketensteuerung nach folgendem endlichen Automat A mit Eingabealphabet $X = \{\texttt{launch}, \texttt{flight}, \texttt{knall}, \texttt{abort}\}$ und Ausgabealphabet $Y = \{\texttt{d}, \texttt{k}\}$ konzipiert, wobei „*“ für alle Zeichen aus X steht:



Doktor Meta hat bereits seinen ersten Konfetti-Angriff für Ende Januar angekündigt. Wird es Theorie-Mans studentischen HiWis noch bis dahin gelingen, eine Abwehrstrategie zu entwickeln? Oder wird doch der ganze KIT-Campus mit klebrigem Konfetti vollgeschmiert werden? Die Uhr tickt!

a) Theorie-Mans Sensordaten haben ergeben, dass sich die Konfetti-Rakete unmittelbar vor ihrer Selbstvernichtung im Zustand q_5 befand. Geben Sie alle Befehlsfolgen an, die zu diesem Zustand geführt haben können.
(Geben Sie alle Wörter $w \in X^*$ mit $f_*(q_0, w) = q_5$ an.)

b) Die Ausgabe $\texttt{k}$ verursacht einen großen Konfetti-Knall, aber auch die Selbstvernichtung der Konfetti-Rakete (Ausgabe $\texttt{d}$) könnte die Freisetzung einer nicht ver-

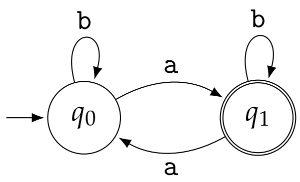
nachlässigbaren Menge an klebrigem Konfetti zur Folge haben. Das heißt, die Konfetti-Rakete ist nur dann sicher entschärft, wenn die Ausgabe von A garantiert leer ist. Welche Eingabe muss vorliegen, sodass das der Fall ist, egal in welchem (noch harmlosen) Zustand der Automat sich aktuell befindet?
(Geben Sie ein $w \in X^*$ an, sodass für jedes $w' \in X^*$ und jedes $z \in \{q_0, q_1, q_2, q_4\}$ gilt: $g_{**}(z, ww') = \varepsilon$.)

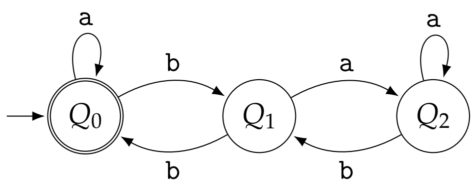
Lösung 12.2

a) $w \in \{\texttt{launch}\}^+ \cdot \{\texttt{flight}\}^+ \cdot \{\texttt{abort}\} \cdot X^*$
b) Z. B. $w = \texttt{flight} \cdot \texttt{launch}$

Aufgabe 12.3 (1 + 2 = 3 Punkte)

Es sei $X = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ sowie folgende endliche Akzeptoren A und B gegeben:

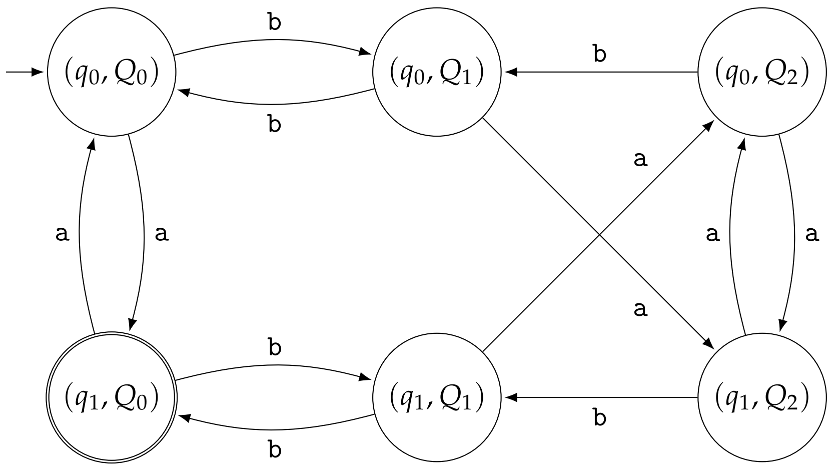




a) Geben Sie alle Wörter in $L(A)$ und $L(B)$ der Länge 3 an. Kennzeichen Sie deutlich, welche Wörter zu $L(A)$ und welche Wörter zu $L(B)$ gehören.
b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor C mit höchstens 6 Zuständen an, sodass $L(A) \cap L(B) = L(C)$ ist.

Lösung 12.3

a) $L(A)$: $\texttt{aaa}, \texttt{abb}, \texttt{bab}, \texttt{bba}$
$L(B)$: $\texttt{aaa}, \texttt{abb}, \texttt{bba}$
b) C:



Aufgabe 12.4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Es sei $X = \{\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}\}$ und $Y = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$. Ferner seien $t, b \colon X^* \to Y^*$ die Homomorphismen, die für jedes $x, y \in Y$ durch $t(\binom{x}{y}) = x$ und $b(\binom{x}{y}) = y$ festgelegt sind. (Siehe Definition von f^{**} in Kapitel 8; statt t^{**} schreiben wir einfach wieder t und analog für b.)

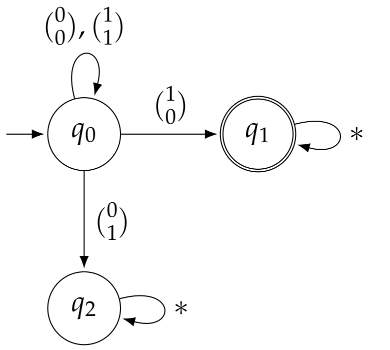
a) Geben Sie einen endlichen Automaten A_1 mit Eingabealphabet X und höchstens 4 Zuständen an, sodass A_1 genau dann ein Wort $w \in X^*$ akzeptiert, wenn $\mathrm{Num}_2(t(w)) > \mathrm{Num}_2(b(w))$ ist.

b) Geben Sie einen endlichen Automaten A_2 mit Eingabealphabet X und höchstens 4 Zuständen an, sodass A_2 genau dann ein Wort $w \in X^*$ akzeptiert, wenn $\mathrm{Num}_2(t(w)) = 2 \cdot \mathrm{Num}_2(b(w))$ ist.
Tipp. Für $m \in \mathbb{N}_+$ gilt $\mathrm{Repr}_2(2m) = \mathrm{Repr}_2(m) \cdot \mathtt{0}$.

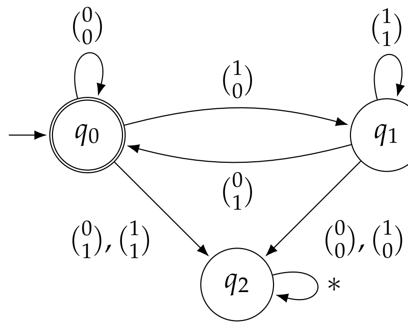
Lösung 12.4

Wie in Aufgabe 12.2 bezeichne $*$ ein beliebiges Symbol aus dem Eingabealphabet X.

a) A_1:

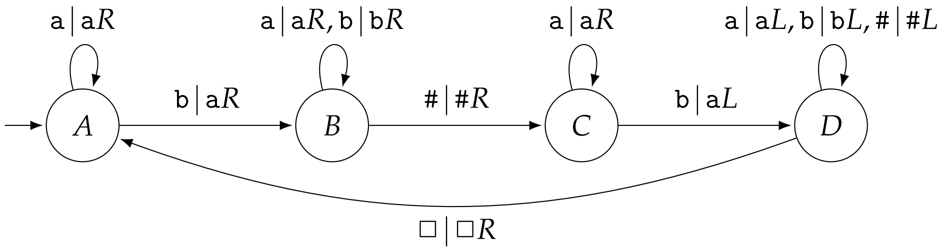


b) A_2:



Aufgabe 12.5 (3 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Es sei folgende Turing-Maschine T mit Eingabealphabet $Q = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}$ und Bandalphabet $X = Q \cup \{\square\}$ gegeben:



a) Simulieren Sie die ersten 12 Schritten von T bei Eingabe $w = \mathtt{bb\#aba}$ und füllen Sie die Tabelle auf der letzten Seite dieses Dokuments auf.

b) Angenommen, das Eingabewort w stammt aus der Menge $\{\mathtt{b}^k\mathtt{\#}\mathtt{b}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_+\}$. Welches Wort $w' \in Q^*$ wird auf dem Band stehen, wenn T anhält?
Tipp. Betrachten Sie die Fälle $k \leq m$ und $k \geq m + 1$ getrennt.

c) Es sei nun $E = \{x\mathtt{\#}y \mid x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+\}$. Für $x \in Q$ und $w \in Q^*$ bezeichne $N_x(w)$ die Anzahl Vorkommen von x in w.
Erweitern Sie T zu einer Turing-Maschine T' mit $L(T') = \{x\mathtt{\#}y \in E \mid N_{\mathtt{b}}(x) = N_{\mathtt{b}}(y)\}$, indem Sie höchstens 3 Zustände zu T hinzufügen. Dazu finden Sie zum Ausdrucken auf der letzten Seite dieses Dokuments das Bild der Originalmaschine, in das Sie Ihre Ergänzungen einzeichnen können.
Kennzeichen Sie alle akzeptierenden Zustände eindeutig. Sie dürfen dabei beliebig viele neue Zustandsübergänge definieren, dafür aber keine der in T bestehenden Übergänge entfernen oder verändern.

Tipp. Nehmen Sie zunächst an, das Eingabewort sei ein Wort aus E, und definieren Sie T' so, dass es für solche Eingaben korrekt ist. Überlegen Sie sich anschließend, welches Verhalten Ihr T' für Eingaben nicht in E hat und passen Sie die Übergänge ggf. an.

Lösung 12.5

a)

Schritt	Konfiguration							
0		A						
	□	b	b	#	a	b	a	□
1			B					
	□	a	b	#	a	b	a	□
2				B				
	□	a	b	#	a	b	a	□
3					C			
	□	a	b	#	a	b	a	□
4						C		
	□	a	b	#	a	b	a	□
5					D			
	□	a	b	#	a	a	a	□
6				D				
	□	a	b	#	a	a	a	□
7			D					
	□	a	b	#	a	a	a	□
8		D						
	□	a	b	#	a	a	a	□
9	D							
	□	a	b	#	a	a	a	□
10		A						
	□	a	b	#	a	a	a	□
11			A					
	□	a	b	#	a	a	a	□
12				B				
	□	a	a	#	a	a	a	□

b) Wenn $k \leq m$: $\mathtt{a}^k\#\mathtt{a}^k\mathtt{b}^{m-k}$
Wenn $k \geq m+1$: $\mathtt{a}^{m+1}\mathtt{b}^{k-m-1}\#\mathtt{a}^m$

c)