Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 9
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: 13. Dezember 2019

Abgabe: 7. Januar 2020, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9:	/ 20
Blätter 7 – 9:	/ 59

Aufgabe 9.1 (2 + 2 = 4 Punkte)

a) Geben Sie einen Homomorphismus $h\colon A_{For}^* \to A_{For}^*$ mit $h(L_{For}) \subseteq L_{For}$ sowie (legale) prädikatenlogische Formeln F und G mit $h(F) = G$ an, für die für jede Substitution $\sigma\colon L_{For} \to L_{For}$ gilt: $\sigma(F) \neq G$.

b) Angenommen, h dürfte nur Variablen verändern, das heißt, es würde zusätzlich noch $h(x) = x$ für $x \in A_{For} \smallsetminus Var_{PL}$ gelten. Würden in diesem Fall auch noch F, G, und h mit den Eigenschaften aus a) existieren? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. solche F, G, und h an.

Lösung 9.1

Für das Verständnis wichtig: Eine Substitution (von Termen für freie Vorkommen von Variablen) „respektiert" den „logischen Aufbau" prädikatenlogischer Formeln. Hingegen darf ein (Wort-)Homomorphismus „respektlose" Dinge tun, die die logische Struktur ändern, wie zum Beispiel aus einem $\wedge$ ein $\vee$ machen oder aus einem $\forall$ ein $\exists$. Außerdem ersetzen Substitutionen nur freie Vorkommen von Variablensymbolen, aber Homomorphismen alle Vorkommen.

a) Es sei h der Homomorphismus, der durch $h(\wedge) = \vee$ und $h(a) = a$ für $a \in A_{For} \smallsetminus \{\wedge\}$ induziert wird. Außerdem sei $F = \mathtt{x} \wedge \mathtt{x}$ und $G = \mathtt{x} \vee \mathtt{x}$. Dann ist $h(F) = G$ aber $\sigma(F) = \sigma(\mathtt{x}) \wedge \sigma(\mathtt{x}) \neq G$ für jede Substitution σ.

b) Ja, es existieren solche F, G, und h. Z. B. sei h der durch $h(\mathtt{x}) = \mathtt{y}$ und $h(a) = a$ für $a \in Var_{PL} \smallsetminus \{\mathtt{x}\}$ induzierte Homomorphismus. Ferner sei $F = \forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(x)}$ und $G = \forall \mathtt{y}\, \mathtt{R(y)}$. Dann ist $h(F) = G$ aber $\sigma(F) = F \neq G$ für jede Substitution σ, weil σ nur *freie* Vorkommen einer Variable ersetzt.

Aufgabe 9.2 (1 + 1.5 + 3 + 1.5 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Für $w \in A^*$ und $x \in A$ seien die Abbildungen $\mathrm{car}, \mathrm{cdr}\colon A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\mathrm{car}(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \mathrm{cdr}(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\mathrm{car}(xw) = x \qquad \mathrm{cdr}(xw) = w$$

a) Was sind $\mathrm{cdr}(\mathrm{car}(w))$ und $\mathrm{car}(\mathrm{cdr}(w))$, wenn $w \in A^*$ beliebig ist?

Es sei jetzt folgender Algorithmus B gegeben, der $z \in A^*$ als Eingabe bekommt und mit Variablen w, x, und y arbeitet, wobei der Wertebereich aller drei Variablen gleich A^* sei:

$w \leftarrow z$
$x \leftarrow \varepsilon$
$y \leftarrow \varepsilon$
while $w \neq \varepsilon$ **do**
  $x \leftarrow x \cdot \mathrm{car}(w)$
  if $\mathrm{car}(w) \neq \mathtt{a}$ **then**
    $y \leftarrow y \cdot \mathrm{car}(w)$
  else
    $y \leftarrow y$
  fi
  $w \leftarrow \mathrm{cdr}(w)$
od

Dabei sind ε und $\mathtt{a}$ Konstantensymbole, die stets mit den offensichtlichen Werten aus A^* interpretiert werden.

b) Für $i \in \mathbb{N}_+$ bezeichne w_i, x_i, bzw. y_i den Wert der Variable w, x, bzw. y unmittelbar nach der i-ten Ausführung (falls es eine gibt) der **while**-Schleife in B. Führen Sie B für $z = \texttt{abac}$ aus und geben Sie w_i, x_i, und y_i für jedes $i \in \mathbb{N}_+$ tabellarisch an. Wird die Schleife echt weniger als i-mal ausgeführt, so müssen Sie nichts angeben.

c) Geben Sie einen Homomorphismus $h\colon A^* \to A^*$ an, so dass die Zusicherung

$$y = h(x) \land x \cdot w = z$$

bzgl. der **while**-Schleife in B invariant ist. Zeigen Sie anschließend mittels des Hoare-Kalküls, dass diese Zusicherung für Ihre Wahl von h tatsächlich eine Schleifeninvariante ist. Sie dürfen dabei ohne Beweis benutzen, dass $\operatorname{car}(w) \cdot \operatorname{cdr}(w) = w$ für jedes $w \in A^*$ ist.

Tipp. Gehen Sie von unten nach oben vor und beschäftigen Sie sich *erst* mit dem **then**-Zweig und *danach* mit dem **else**-Zweig.

d) Welche Werte haben die Variablen w, x, und y nach Ausführung von B im Allgemeinen?

Lösung 9.2

a)
- $\operatorname{cdr}(\operatorname{car}(w)) = \varepsilon$ für jedes $w \in A^*$.
- Wenn $|w| \geq 2$, $\operatorname{car}(\operatorname{cdr}(w)) = w(1)$ (d. h. das zweite Zeichen von w); andernfalls $\operatorname{car}(\operatorname{cdr}(w)) = \varepsilon$.

b)

i	1	2	3	4
w_i	bac	ac	c	ε
x_i	a	ab	aba	abac
y_i	ε	b	b	bc

c) h sei der Homomorphismus mit $h(\texttt{a}) = \varepsilon$ und $h(x) = x$ für $x \in A \setminus \{\texttt{a}\}$.

$\{y = h(x) \land x \cdot w = z \land w \neq \varepsilon\}$
$\{y \cdot h(\operatorname{car}(w)) = h(x) \cdot h(\operatorname{car}(w)) \land x \cdot w = z\}$
$\{y \cdot h(\operatorname{car}(w)) = h(x \cdot \operatorname{car}(w)) \land x \cdot \operatorname{car}(w) \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
$x \leftarrow x \cdot \operatorname{car}(w)$
$\{y \cdot h(\operatorname{car}(w)) = h(x) \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
if $\operatorname{car}(w) \neq \texttt{a}$ **then**
  $\{y \cdot h(\operatorname{car}(w)) = h(x) \land \operatorname{car}(w) \neq \texttt{a} \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
  $\{y \cdot \operatorname{car}(w) = h(x) \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
  $y \leftarrow y \cdot \operatorname{car}(w)$
  $\{y = h(x) \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
else
  $\{y \cdot h(\operatorname{car}(w)) = h(x) \land \operatorname{car}(w) = \texttt{a} \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
  $\{y = h(x) \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
  $y \leftarrow y$
  $\{y = h(x) \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
fi
$\{y = h(x) \land x \cdot \operatorname{cdr}(w) = z\}$
$w \leftarrow \operatorname{cdr}(w)$
$\{y = h(x) \land x \cdot w = z\}$

d) $w = \varepsilon$, $x = z$, und $y = h(x) = h(z)$

Aufgabe 9.3 **(1.5 + 0.5 + 1 + 4 + 2 = 9 Punkte)**
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie folgenden Algorithmus A, dessen Variablen y und i heißen und Wertebereich $\mathbb{N}_0$ haben:

$$
\begin{array}{l}
y \leftarrow f(0) \\
i \leftarrow 0 \\
\textbf{while } i < n \textbf{ do} \\
\quad i \leftarrow i + 1 \\
\quad y \leftarrow y + f(i) \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

Für $j \in \mathbb{N}_+$ sei y_j bzw. i_j der Wert der Variable y bzw. i nach der j-ten Ausführung (falls es eine gibt) der **while**-Schleife von A.

a) Führen Sie A für die Eingabe $n = 4$ aus, wobei die Interpretation von f die Abbildung mit $f(x) = 2x$ sei. Geben Sie y_j und i_j für jedes $j \in \mathbb{N}_+$ tabellarisch an. Wird die Schleife echt weniger als j-mal ausgeführt, so müssen Sie nichts angeben.

b) Wie oft wird die **while**-Schleife von A für beliebige Eingabe n ausgeführt?

c) Welcher Wert hat die Variable y nach Ausführung von A, wenn $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und $f = \mathrm{I}_{\mathbb{N}_0}$ ist?
Erinnerung. Für eine Menge M ist $\mathrm{I}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$.

d) In dieser Teilaufgabe geht es darum, die Gültigkeit des Hoare-Tripels

$$T: \quad \{0 = 0\}\ A\ \{y = \sum_{j=0}^{n} f(j)\}$$

zu beweisen.
- Geben Sie eine Invariante I für die **while**-Schleife von A an. Ihre Invariante muss dabei so stark sein, dass sie in einem Beweis im Hoare-Kalkül eine wesentliche Rolle spielen kann, um die Gültigkeit von T zu zeigen.
- Zeigen Sie im Hoare-Kalkül, dass Ihr I tatsächlich eine Schleifeninvariante ist.
- Zeigen Sie im Hoare-Kalkül, dass $\{0 = 0\}\ y \leftarrow f(0);\ i \leftarrow 0\ \{I\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist.
- Zeigen Sie, dass $I \wedge \neg(i < n)$ die Zusicherung $y = \sum_{j=0}^{n} f(j)$ impliziert.

Tipp. Achten Sie darauf, dass „$\wedge\, i \leq n$“ Bestandteil ihrer Invariante I ist.

e) Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck an, der bei jeder Ausführung der **while**-Schleife von A echt kleiner wird. Folgern Sie anschließend daraus, dass A für beliebiges n und f stets terminiert.

Lösung 9.3

a)

j	1	2	3	4
i_j	1	2	3	4
y_j	2	6	12	20

b) n mal

c) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

d) Invariante I: $y = \sum_{j=0}^{i} f(j) \wedge i \leq n$
Hier der vollständige Beweis im Hoare-Kalkül:

$$\{0 = 0\}$$
$$\{f(0) = f(0)\}$$
$$y \leftarrow f(0)$$
$$\{y = f(0)\}$$
$$\{y = \sum_{j=0}^{0} f(j) \wedge 0 \leq n\}$$
$$i \leftarrow 0$$
$$\{I\}$$
while $i < n$ **do**
$$\{I \wedge i < n\}$$
$$\{y = \sum_{j=0}^{i} f(j) \wedge i < n\}$$
$$\{y + f(i+1) = \sum_{j=0}^{i+1} f(j) \wedge i + 1 \leq n\}$$
$$i \leftarrow i + 1$$
$$\{y + f(i) = \sum_{j=0}^{i} f(j) \wedge i \leq n\}$$
$$y \leftarrow y + f(i)$$
$$\{I\}$$
od
$$\{I \wedge \neg(i < n)\}$$
$$\{y = \sum_{j=0}^{i} f(j) \wedge i \leq n \wedge i \geq n\}$$
$$\{y = \sum_{j=0}^{i} f(j) \wedge i = n\}$$
$$\{y = \sum_{j=0}^{n} f(j)\}$$

e) $n - i$
Wie eben bewiesen ist $i \leq n$ eine Invariante, also gilt vor und nach jeder Ausführung des Schleifenrumpfs stets $n - i \in \mathbb{N}_0$. Dieser Wert wird mit jedem Schleifendurchlauf um 1 kleiner, deshalb kann es nur endlich viele Schleifendurchläufe geben.