Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 5. Dezember 2019

Abgabe: 17. Dezember 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 18
Blätter 7 – 8:	/ 39

Aufgabe 8.1 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Es sei $F = \forall\mathtt{x}\,\exists\mathtt{y}\,\mathtt{R(x,y)}$. Geben Sie für jede der folgenden prädikatenlogischen Formeln G_i und $i \in \{1,2,3\}$ an, ob G_i und F logisch äquivalent sind. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. eine konkrete Wahl einer Interpretation (D_i, I_i) und einer Variablenbelegung β_i an, für die $val_{D_i,I_i,\beta_i}(F) \neq val_{D_i,I_i,\beta_i}(G_i)$ ist.

a) $G_1 = \exists\mathtt{y}\,\forall\mathtt{x}\,\mathtt{R(x,y)}$
b) $G_2 = \forall\mathtt{y}\,\exists\mathtt{x}\,\mathtt{R(y,x)}$
c) $G_3 = \forall\mathtt{y}\,\exists\mathtt{x}\,\mathtt{R(x,y)}$

Aufgabe 8.2 (1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte)
Es sei $\mathtt{S}$ ein einstelliges Relationssymbol, und für $i \in \{1,2,3\}$ sei $\mathtt{R}_i$ ein zweistelliges Relationssymbol sowie F_i die prädikatenlogische Formel

$$F_i : \quad \exists\mathtt{x}\,\forall\mathtt{y}\,(\mathtt{R}_i\mathtt{(x,y)} \rightarrow \mathtt{S(y)})\,.$$

Es sei $A = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$. Für jedes $w \in A^+$ und jedes i wird eine Interpretation (D_w, I_w) durch $D_w = \mathbb{Z}_{|w|}$, $I_w(\mathtt{S}) = \{y \in D \mid w(y) = \mathtt{a}\}$, und $I_w(\mathtt{R}_i)$ wie folgt festgelegt:

a) $I_w(\mathtt{R}_1) = \{(x,y) \in D \times D \mid x \neq y\}$
b) $I_w(\mathtt{R}_2) = \{(x,y) \in D \times D \mid x \leq y\}$
c) $I_w(\mathtt{R}_3) = \{(x,y) \in D \times D \mid x + y \text{ gerade}\}$

Da die Formeln F_i keine freien Variablen enthalten, kann eine Variablenbelegung β beliebig gewählt werden.

Geben Sie für jedes i jeweils die Sprache $L_i \subseteq A^*$ explizit an, die genau jedes Wort $w \in A^+$ enthält, für das $val_{D_w,I_w,\beta}(F_i) = \mathbf{w}$ ist.

Aufgabe 8.3 (2 + 1.5 + 1.5 + 1 = 6 Punkte)
Gegeben seien die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

$$F = \forall\mathtt{x}\,\mathtt{R(x,x)} \quad \text{und} \quad G = \forall\mathtt{x}\,\forall\mathtt{y}\,\forall\mathtt{z}\,(\mathtt{R(x,y)} \wedge \mathtt{R(y,z)} \rightarrow \mathtt{R(x,z)})$$

a) Geben Sie ein Modell für G (also eine Interpretation (D, I), sodass $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ für jede Variablenbelegung β ist) an, das aber nicht Modell von F ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Gibt es eine Domäne D, sodass $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{w}$ für jede Interpretation (D', I) mit $D' = D$ und beliebige Variablenbelegung β gilt? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. D an.
c) Gibt es eine Domäne D, sodass $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ für jede Interpretation (D', I) mit $D' = D$ und beliebige Variablenbelegung β gilt? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. D an.
d) Ist F bzw. G allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.4 (1 + 1.5 + 1.5 = 4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

$$F_1 = \mathtt{R(x)} \rightarrow \exists\mathtt{y}\,(\mathtt{R(y)} \wedge \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{T(z)}) \quad \text{und} \quad F_2 = (\mathtt{T(y)} \wedge \neg\mathtt{S(x)} \wedge \forall\mathtt{y}\,\mathtt{R(y)}) \rightarrow \forall\mathtt{y}\,\mathtt{T(y)}$$

a) Geben Sie $\mathrm{fv}(F_i)$ und $\mathrm{bv}(F_i)$ für $i \in \{1,2\}$ explizit an.
b) Gibt es eine Substitution σ_1, die nicht kollisionsfrei für F_1 ist? Falls ja, geben Sie ein solches σ_1 an; andernfalls begründen Sie, warum es kein solches σ_1 geben kann.
c) Gibt es eine Substitution σ_2, die nicht kollisionsfrei für F_2 ist? Falls ja, geben Sie ein solches σ_2 an; andernfalls begründen Sie, warum es kein solches σ_2 geben kann.