Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 5
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 15. November 2019

Abgabe: 26. November 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig
- handschriftlich
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 5: / 21

Hinweis: Auf den ersten 6 Aufgabenblättern wird man insgesamt genau 120 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn auf den ersten 6 Aufgabenblättern mindestens 60 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 5.1 (3 Punkte)
Es seien $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit $a > b \geq 2$ gegeben. Zeigen Sie: Gibt es einen Homomorphismus $f\colon Z_a^* \to Z_b^*$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{Num}_b(f(\mathrm{Repr}_a(x))) = x, \tag{BE}$$

so gibt es $n \in \mathbb{N}_+$ mit $a = b^n$.
Tipp. Es gilt $\mathtt{1} \in Z_b$. Überlegen Sie sich also zuerst, was $f(\mathtt{1})$ sein kann.

Lösung 5.1
Es sei f mit der Eigenschaft BE gegeben. Es ist $\mathrm{Repr}_a(1) = \mathtt{1}$, also

$$1 = \mathrm{Num}_b(f(\mathrm{Repr}_a(1))) = \mathrm{Num}_b(f(\mathtt{1}))$$

und damit $f(\mathtt{1}) = \mathtt{0}^m\mathtt{1}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$.

Analog ist $0 = \mathrm{Num}_b(f(\mathrm{Repr}_a(0))) = \mathrm{Num}_b(f(\mathtt{0}))$ und folglich $f(\mathtt{0}) = \mathtt{0}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_+$.

Um die Homomorphismuseigenschaft von f auszunutzen, kann man nun z. B. $f(\mathtt{10}) = f(\mathtt{1})f(\mathtt{0})$ oder $f(\mathtt{11}) = f(\mathtt{1})f(\mathtt{1})$ betrachten.

Im ersten Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{einerseits} \quad \mathrm{Num}_b(f(\mathtt{10})) &= \mathrm{Num}_b(f(\mathrm{Repr}_a(a))) \\
&= a \\
\text{andererseits} \quad \mathrm{Num}_b(f(\mathtt{10})) &= \mathrm{Num}_b(f(\mathtt{1})f(\mathtt{0}))) = \mathrm{Num}_b(\mathtt{0}^m\mathtt{10}^n) \\
&= b^n
\end{aligned}$$

Wer lieber $f(\mathtt{11})$ betrachtet, kann wegen $\mathrm{Repr}_a(a+1) = \mathtt{11}$ z. B. so rechnen:

$$a + 1 = \mathrm{Num}_b(f(\mathrm{Repr}_a(a+1))) = \mathrm{Num}_b(f(\mathtt{11})) = \mathrm{Num}_b(f(\mathtt{1})f(\mathtt{1})) = \mathrm{Num}_b(\mathtt{0}^m\mathtt{10}^m\mathtt{1})$$

Damit folgt $a + 1 = b^{m+1} + 1$, also $a = b^{m+1}$, was zu zeigen war.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)
Es seien A und B Mengen und $|A|, |B| \geq 2$. Die Abbildungen

$$\pi_A\colon \begin{cases} A \times B \to A \\ (a, b) \mapsto a \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \pi_B\colon \begin{cases} A \times B \to B \\ (a, b) \mapsto b \end{cases}$$

heißen *Projektionen* von $A \times B$ auf A bzw. B.

Jede der folgenden vier Behauptungen ist wahr oder falsch. Geben Sie für jede entweder eine Begründung, warum sie falsch ist, oder geben Sie konkret eine entsprechende Abbildung λ_x bzw. ρ_x an.

a) Die Abbildung π_A besitzt eine linkssinverse Abbildung λ_A.
b) Die Abbildung π_A besitzt eine rechtsinverse Abbildung ρ_A.
c) Die Abbildung π_B besitzt eine linkssinverse Abbildung λ_B.
d) Die Abbildung π_B besitzt eine rechtsinverse Abbildung ρ_B.

Lösung 5.2

a) Nein, eine Linksinverse zu π_A kann es nicht geben: Da $|B| \geq 2$ ist, existieren $b_1, b_2 \in B$ mit $b_1 \neq b_2$. Sei außerdem $a_1 \in A$ (existiert, da $|A| \geq 1$). Dann ist $\pi_A(a_1, b_1) = a_1 = \pi_A(a_1, b_2)$, obwohl $(a_1, b_1) \neq (a_1, b_2)$ ist. Also ist π_A nicht injektiv und kann insbesondere keine linksinverse Abbildung besitzen.

b) Es sei $b_1 \in B$ beliebig (existiert, weil $|B| \geq 1$). Dann ist folgende Abbildung rechtsinvers zu π_A:

$$\rho_A\colon \begin{cases} A \to A \times B \\ a \mapsto (a, b_1) \end{cases}$$

Rechnung für „rechtinvers“ (war nicht verlangt): $\forall a \in A$ gilt

$$\pi_A(\rho_A(a)) = \pi_A(a, b_1) = a$$

c) Der Fall für π_B ist analog zu π_A: Die Abbildung hat keine Linksinverse, weil sie nicht injektiv ist. Argumentation in Kurzform: $\pi_B(a_1, b_1) = b_1 = \pi_B(a_2, b_1)$, aber $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_1)$.

d) Es sei $a_1 \in A$ beliebig (existiert, weil $|A| \geq 1$). Dann ist folgende Abbildung rechtsinvers zu π_B:

$$\rho_B\colon \begin{cases} B \to A \times B \\ b \mapsto (a_1, b) \end{cases}$$

Anmerkung: Wir hatten $|A|, |B| \geq 2$ vorausgesetzt, es lohnt sich aber auch anzuschauen, was geschieht, wenn diese Annahme nicht gemacht wird:

Ist A bzw. B leer, so ist $A \times B = \emptyset$ und damit sowohl π_A und π_B sind gleich die Identität $I_\emptyset$. Insbesondere sind sie also bijektiv und haben links- und rechtsinverse Abbildungen. Es gilt sogar $\lambda_A = \lambda_B = \rho_A = \rho_B = \pi_A = \pi_B$.

Sind A und B nicht leer aber $|A| = 1$ (bzw. $|B| = 1$), so gilt die obere Argumentation zu den Teilaufgaben d) bzw. b). Die von c) bzw. a) trifft aber nicht mehr zu: Sei $a_1 \in A$ (bzw. $b_1 \in B$). Für $(a, b) \in A \times B$ gilt $\pi_B(a, b) = b$ (bzw. $\pi_A(a, b) = a$), es gibt aber kein anderes Urbild zu b (bzw. a), weil zwangsweise $a = a_1$ (bzw. $b = b_1$) ist. Damit ist

$$\lambda_B\colon \begin{cases} B \to A \times B \\ b \mapsto (a_1, b) \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_A\colon \begin{cases} A \to A \times B \\ a \mapsto (a, b_1) \end{cases}$$

linksinvers zu π_B (bzw. π_A).

Aufgabe 5.3 (1.5 + 1 + 1.5 + 2 = 6 Punkte)

Es sei M eine Menge und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Wir definieren eine Abbildung $\Phi_f\colon M \times \mathbb{N}_0 \to M$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \forall x \in M: \qquad & \Phi_f(x, 0) = x \\ \forall x \in M, n \in \mathbb{N}_0: \qquad & \Phi_f(x, n+1) = \Phi_f(f(x), n) \end{aligned}$$

Ferner sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $B = A \cup \{\$\}$, und $f\colon B^* \to B^*$ sei wie folgt festgelegt:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \forall x \in B\ \forall w \in B^*\colon f(xw) = wx\$$$

a) Geben Sie $\Phi_f(w, 3)$ für jedes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{bb}, \mathtt{aaaa}, \mathtt{bababa}\}$ an.

b) Es sei $N_\$(w)$ für beliebiges $w \in B^*$ die Anzahl Vorkommen des Zeichens „\$" in w. Geben Sie $N_\$(\Phi_f(w,n))$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und $w \in B^*$ an.
c) Welchen Wert hat $\Phi_f(w,|w|)$ für beliebiges $w \in A^*$?
d) Betrachten Sie die Abbildung $C\colon B^* \to B^*\colon w \mapsto \Phi_f(w,|w|)$. Sie ist injektiv, also eine Codierung. Nennen Sie zwei aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften von Codierungen, die C hat. Begründen Sie Ihre Antwort. Sie dürfen dazu Ihre Behauptung aus Teilaufgabe c) benutzen (ohne sie noch zu beweisen).

Lösung 5.3

a) • $\Phi_f(\mathtt{a},3) = \mathtt{a\$\$\$}$ • $\Phi_f(\mathtt{bb},3) = \mathtt{\$b\$b\$}$ • $\Phi_f(\mathtt{aaaa},3) = \mathtt{aa\$a\$a\$}$
• $\Phi_f(\mathtt{bababa},3) = \mathtt{abab\$a\$b\$}$
b) $N_\$(\Phi_f(w,n)) = N_\$(w) + n$, es sei denn, $w = \varepsilon$ ist.
Im letzteren Fall ist $N_\$(\Phi_f(\varepsilon,n)) = N_\$(\varepsilon) = 0$.
c) ε für $w = \varepsilon$ bzw. $w(0)\$w(1)\$\cdots w(|w|-1)\$$ für $w \in A^+$
Das kann man als Homomorphismus $h\colon B^* \to B^*\colon w \mapsto \Phi_f(w,|w|)$ fassen, wobei $h(x) = x\$$ ist für $x \in B$.
d)
- Homomorphismus (siehe oben)
- ε-frei: mit der Homomorphismuscharakterisierung ergibt sich:
  $\forall w \in A^+ : |h(w)| = 2|w| \geq |w| \geq 1$, also $h(w) \neq \varepsilon$
- präfixfrei: Von $h(\mathtt{a}) = \mathtt{a\$}$, $h(\mathtt{b}) = \mathtt{b\$}$, und $h(\$) = \$\$$ ist offensichtlich keines Präfix des anderen.

Aufgabe 5.4 (2.5 + 1 + 1.5 = 5 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$ sowie $d\colon A^* \to A^*$ der Homomorphismus mit $d(\mathtt{0}) = \mathtt{00}$ und $d(\mathtt{1}) = \mathtt{11}$. Ferner sei $C\colon A^* \times A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\forall x,y \in A^* : C(x,y) = x\mathtt{01}d(y)$$

a) Es sei $z \in A^*$ ein Wort, für das es mindestens ein Paar $(x,y) \in A^* \times A^*$ gibt mit $z = C(x,y)$. Beschreiben Sie präzise, wie man solche Wörter x und y bestimmen kann, wenn man nur z gegeben hat. Begründen Sie, warum x und y immer eindeutig bestimmt sind.

Betrachten Sie jetzt die Abbildung:

$$D\colon \begin{cases} (A^* \times A^*)^2 \to A^* \\ (z_1,z_2) \mapsto C(z_1)C(z_2) \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass D nicht injektiv ist.
c) Geben Sie eine Abbildung E mit gleichem Definitions- und Zielbereich wie D an, die injektiv ist. Erleichtern Sie sich möglichst die Arbeit, indem Sie an der Festlegung des Funktionswertes $D(z_1,z_2)$ nur „kleine Änderungen" vornehmen. Begründen Sie, dass Ihr E injektiv ist.

Lösung 5.4

a) Als Beispiel betrachten wir $z = \mathtt{01001110011}$.
   (i) Man zerlege z von rechts in Zweierblöcke, bis zum ersten Mal der Block $\mathtt{01}$ entsteht. Im Beispiel ergibt sich $z = \mathtt{010} \cdot \mathtt{01} \cdot \mathtt{11} \cdot \mathtt{00} \cdot \mathtt{11}$

Da das Wort $d(y)$ immer aus Zweierblöcken mit zwei identischen Zeichen besteht, ist dieser Block der eindeutig bestimmte „Trenner“ zwischen x und $d(y)$ in $C(x, y)$.

(ii) Das Präfix *vor* diesem `01`-Block ist also das dann eindeutig bestimmte x. Im Beispiel $x = \mathtt{010}$.

(iii) Das einzige passende y erhält man, indem man aus jedem Zweierblock rechts des Trenners jeweils eines der beiden gleichen Zeichen löscht. Im Beispiel $y = \mathtt{101}$.

b) Es gilt

$$D((\varepsilon, \mathtt{1}), (\varepsilon, \varepsilon)) = (\varepsilon \cdot \mathtt{01} \cdot \mathtt{11}) \cdot (\varepsilon \cdot \mathtt{01} \cdot \varepsilon) = (\varepsilon \cdot \mathtt{01} \cdot \varepsilon) \cdot (\mathtt{11} \cdot \mathtt{01} \cdot \varepsilon) = D((\varepsilon, \varepsilon), (\mathtt{11}, \varepsilon)),$$

also ist D ist nicht injektiv (und damit keine Codierung).

c) Man könnte D z. B. wie folgt umdefinieren:

$$E\colon \begin{cases} (A^* \times A^*)^2 \to A^* \\ (z_1, z_2) \mapsto C(z_1)\mathtt{01}d(C(z_2)) \end{cases}$$

E ist eine Codierung, weil jedes Codewort $w = E(z_1, z_2)$ wie folgt eindeutig unterteilt werden kann:

$$w = x_1\mathtt{01}d(y_1)\mathtt{01}d(x_2)\mathtt{0011}d(d(y_2))$$

wobei $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$ ist. Die Bestimmung von x_1, y_1, x_2, und y_2 lässt sich analog zu Teilaufgabe a) durchführen.

Aufgabe 5.5 (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)

Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ und $B = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Zudem sei C die Codierung $C\colon A^* \to B^*$, die als Homomorphismus wie folgt induziert wird:

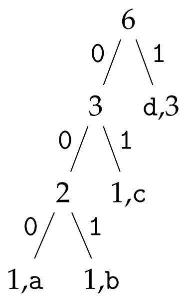
$$C(\mathtt{a}) = \mathtt{00}, \qquad C(\mathtt{b}) = \mathtt{01}, \qquad C(\mathtt{c}) = \mathtt{10}, \qquad C(\mathtt{d}) = \mathtt{11}$$

a) Geben Sie ein Wort $w \in A^*$ minimaler Länge derart an, dass:
- jedes Zeichen von A mindestens einmal in w vorkommt und
- jede Huffman-Codierung von w echt kürzer ist als $C(w)$.

b) Erstellen Sie einen Huffman-Baum zu Ihrem Wort w aus Teilaufgabe a) und geben Sie für jedes Zeichen von A seine Codierung an.

Lösung 5.5

a) Man muss ein $w \in A^6$ wählen, in dem ein Zeichen dreimal vorkommt und jedes andere einmal, also z. B. $w = \mathtt{abcddd}$.

b) 

Die Zeichen werden dabei wie folgt codiert:

a	b	c	d
000	001	01	1