Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 29. Oktober 2014

Abgabe: 7. November 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	$/ \ 17 + 2$
Blätter 1 – 2:	$/ \ 32 + 5$

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Die Sprache L enthalte genau jene Worte aus $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$, bei denen auf ein $\mathtt{b}$ kein $\mathtt{a}$ folgt und auf ein $\mathtt{c}$ weder ein $\mathtt{a}$ noch ein $\mathtt{b}$.

a) Geben Sie die Sprache L in der Form $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid \dots\}$ an.
b) Geben Sie drei Sprachen L_1, L_2 und L_3 so an, dass jede der drei Sprachen unendlich viele Worte enthält und $L = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$ gilt.
c) Geben Sie zwei Sprachen L_1 und L_2 so an, dass $L = L_1 \cdot L_2$ sowie $L = L_2 \cdot L_1$ gelten.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ganzer Zahlen sei definiert durch die Festlegungen

$$x_0 = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon x_{n+1} = (-1)^{n+1} 2^n - x_n.$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon x_n = (-2)^n.$$

Aufgabe 2.3 (1+4+1=6 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Eine Abbildung $f \colon A^* \to A^*$ sei induktiv wie folgt definiert:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$\forall v \in A^* \; \forall x \in A \colon f(xv) = f(v) x f(v).$$

a) Geben Sie $f(\mathtt{ab})$ und $f(\mathtt{aba})$ an.
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall w \in A^n \colon |f(w)| = 2^{|w|} - 1.$$

c) Wie viele Kilometer Platz bräuchte man ungefähr, um das Wort $f(f(f(f(\mathtt{ab}))))$ hinzuschreiben, wenn man für jedes Zeichen 1 mm benötigt? Die Angabe von 3 signifikanten Stellen genügt.

Aufgabe 2.4 (3 Punkte)
Es sei A ein Alphabet. Für jedes Wort $w \in A^*$ ist sein *Spiegelbild* das Wort $\widetilde{w} \in A^*$, für welches gilt:

(i) $|\widetilde{w}| = |w|$;
(ii) $\forall i \in \{0, 1, \dots, |w| - 1\} \colon \widetilde{w}_i = w_{|w|-i-1}$.

Definieren Sie induktiv eine Abbildung $f \colon A^* \to A^*$ so, dass

$$\forall w \in A^* \colon f(w) = \widetilde{w}.$$

Lassen Sie sich dabei von der induktiven Definition der vorangegangenen Aufgabe inspirieren.

Hinweis: Wie auf den Vorlesungsfolien erwähnt schreiben wir bei einem Wort w für einzelne Symbole statt $w(i)$ gelegentlich kürzer w_i.

***Aufgabe 2.5 (2 Extrapunkte)**
Hinweis zum Lesen: Bei dem nachfolgend auftretenden Symbol ω handelt es sich um ein kleines griechisches „omega" (und nicht um ein lateinisches „w").

Es sei A ein Alphabet. Eine Abbildung $\mu\colon \mathbb{N}_0 \to A$ heißt *ω-Wort über A*. Mit A^ω bezeichnen wir die Menge aller ω-Wörter. Eine Teilmenge L von A^ω heißt ω-Sprache. Für jedes ω-Wort μ über A, jeden Index $i \in \mathbb{N}_0$ und jeden Index $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \geq i$, sei $\mu_{i,j}$ das Wort $v \in A^*$ der Länge $j - i + 1$, für welches gilt:

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, |v| - 1\}\colon v_k = \mu(i + k).$$

Für jedes Wort $v \in A^*$ sei v^ω jenes ω-Wort μ über A, für das gilt:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0\colon \mu_{i \cdot |v|, (i+1) \cdot |v| - 1} = v.$$

Ein ω-Wort μ über A heißt *periodisch*, wenn es ein Wort $v \in A^*$ gibt derart, dass $\mu = v^\omega$.

a) Geben Sie die ω-Sprache aller periodischen ω-Wörter in der Form $\{v \in A^\omega \mid \ldots\}$ an.
b) Geben Sie ein ω-Wort über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, das nicht periodisch ist.

Ein ω-Wort μ über A heißt *schließlich periodisch*, wenn es ein Wort $v \in A^*$ und einen Versatz $n \in \mathbb{N}_0$ gibt derart, dass gilt:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0\colon \mu_{n + i \cdot |v|, n + (i+1) \cdot |v| - 1} = v.$$

c) Geben Sie ein ω-Wort über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, das schließlich periodisch ist.
d) Geben Sie ein ω-Wort über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, das nicht schließlich periodisch ist.