Musterlösung (Stand 30.9.2014) zur
Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
15. September 2014

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	8	6	8	4	9	7
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:			Note:	

Punkte

Aufgabe 1 (2 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8 Punkte)

- Geben Sie zwei Funktionen $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ und $g\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ derart an, dass $f(n) \in \Theta(n^2)$, $g(n) \in \Theta(n^2)$ und $(f(n) - g(n)) \in \Theta(n)$.

  Beispiel: $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^2 + n$

- Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit 641 Zuständen und Eingabealphabet $\{a, b\}$ an, der die formale Sprache $L = \{\}$ akzeptiert.

  Beispiel: $Z = \mathbb{Z}_{641}$, Anfangszustand 0, Menge akzeptierender Zustände $F = \emptyset$ und Überführungsfunktion f mit $f(z, x) = z$ für alle $z \in Z$ und alle $x \in \{a, b\}$.

- Für welche Belegung mit Wahrheitswerten wird die aussagenlogische Formel $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ wahr?

  alle
  (Die Angabe einer erfüllenden Belegung genügte.)

- Geben Sie eine Menge M und eine totale Abbildung $f : M \to M$ an, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

  Beispiel: $M = \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{N}\colon f(x) = x + 1$.
  (M muss unendlich sein.)

- Die Sprachen L_k, $k \in \mathbb{N}_0$, seien induktiv definiert durch

$$L_0 = \{a\},$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon L_{k+1} = L_k^* L_k.$$

  Geben Sie für jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ die Sprache L_{k+1} ohne Bezug auf andere L_j, $j \in \mathbb{N}_0$, in Mengenschreibweise an.

  $L_{k+1} = \{a\}^+$

Aufgabe 2 (2 + 2 + 1 + 3 = 8 Punkte)

Punkte

Es sei L_1 die formale Sprache

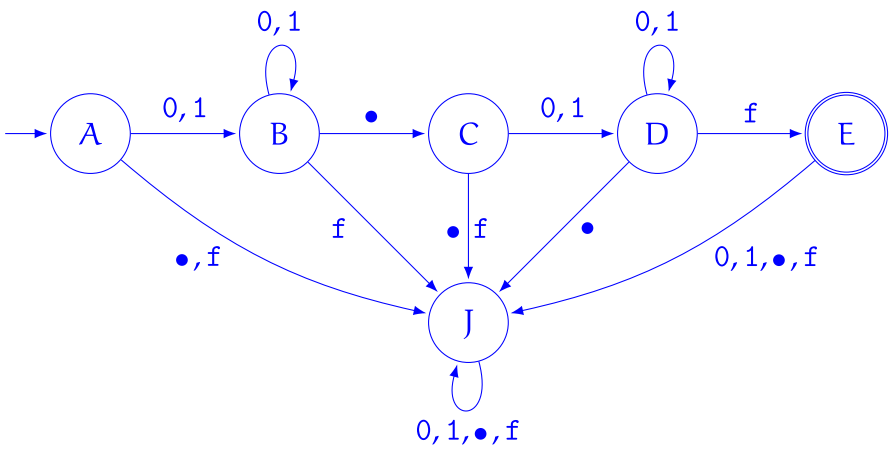
$$L_1 = \left\{ w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \bullet, \mathtt{f}\}^* \wedge \exists w_1, w_2 \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+ : w = w_1 \bullet w_2 \mathtt{f} \right\}.$$

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R derart an, dass $\langle R \rangle = L_1$. Verwenden Sie in Ihrem regulären Ausdruck ausschließlich die Symbole `0`, `1`, $\bullet$, `f`, `(`, `)`, `|`, `*` und `Ø`.

Lösung

R = `(0|1)(0|1)*` $\bullet$ `(0|1)(0|1)*f`

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der die formale Sprache L_1 akzeptiert.



Es sei L_2 die formale Sprache über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, die genau diejenigen $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ enthält, für die gilt:

- w beginnt mit einem `a` und
- w endet mit einem `b` und
- w enthält mindestens zwei `a` und
- w enthält mindestens zwei `b`.

c) Geben Sie drei Wörter an, die zu L_2 gehören, und drei Wörter, die nicht zu L_2 gehören.

Lösung

in L_2: abab, aabb, aaaaababb
nicht in L_2: aab, aabba, ε

d) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der L_2 beschreibt.

Lösung: zum Beispiel `a(a|b)*(ab|ba)(a|b)*b`

Aufgabe 3 (3 + 2 + 1 = 6 Punkte)

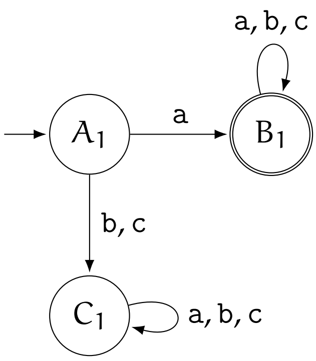
Punkte

Gegeben seien zwei Akzeptoren $M_i = (Z_i, A_i, X_i, f_i, F_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Deren *Produktakzeptor* $M_1 \times M_2$ ist festgelegt durch die Zustandsmenge $Z_1 \times Z_2$, den Anfangszustand (A_1, A_2), das Eingabealphabet $X_1 \cap X_2$, die Zustandsüberführungsfunktion

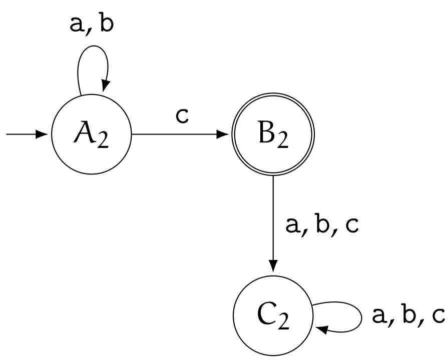
$$\begin{aligned} f\colon (Z_1 \times Z_2) \times (X_1 \cap X_2) &\to Z_1 \times Z_2, \\ f((z_1, z_2), x) &= (f_1(z_1, x), f_2(z_2, x)), \end{aligned}$$

und die Menge $F_1 \times F_2$ als Menge der akzeptierenden Zustände.

a) Nachfolgend sind zwei Akzeptoren M_1 (links) und M_2 (rechts) graphisch dargestellt:

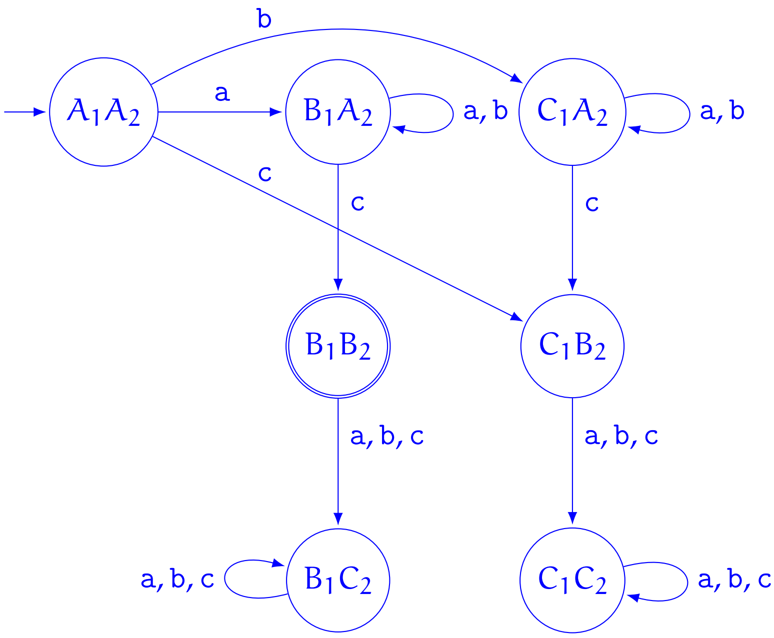


bzw.



Geben Sie den Produktakzeptor $M_1 \times M_2$ graphisch an. Sie können dabei die Zustände, die nicht vom Anfangszustand erreichbar sind, weglassen.

Lösung



b) Welche Sprachen werden von den drei Akzeptoren M_1, M_2 und $M_1 \times M_2$ der vorherigen Teilaufgabe akzeptiert?

Lösung: $L(M_1) = \{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$, $L(M_2) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{c}\}$, und $L(M_1 \times M_2) = \{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{c}\}$

c) Charakterisieren Sie die von einem Produktakzeptor $M_1 \times M_2$ akzeptierte Sprache $L(M_1 \times M_2)$ anhand der Sprachen $L(M_1)$ und $L(M_2)$. Nutzen Sie dabei ausschließlich die Mengenoperationen $\cup$, $\cap$ und $\times$.

Lösung: $L(M_1 \times M_2) = L(M_1) \cap L(M_2)$

Punkte

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

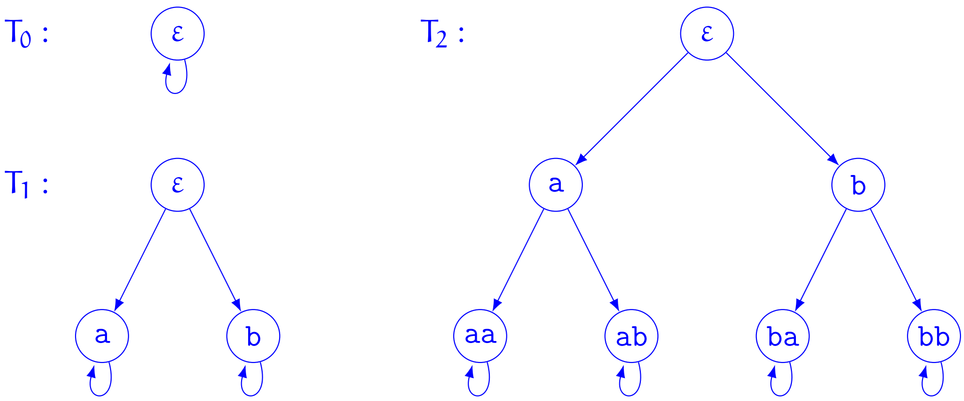
Gegeben sei für jede nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ ein gerichteter Graph $T_k = (V_k, E_k)$ mit Knotenmenge

$$V_k = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \wedge |w| \leq k\}$$

und Kantenmenge

$$\begin{aligned} E_k = &\{(w_1, w_2) \mid w_1 \in V_k \wedge w_2 \in V_k \wedge \exists x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\} \colon w_2 = w_1 x\} \\ &\cup \{(w, w) \mid w \in V_k \wedge |w| = k\}. \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie T_0, T_1 und T_2.



b) Für welche nicht-negativen ganzen Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Relation E_k

- reflexiv?
  Lösung: nur für $k = 0$
- transitiv?
  Lösung: für $k = 0$ und $k = 1$
- symmetrisch?
  Lösung: nur für $k = 0$
- antisymmetrisch?
  Lösung: für alle $k \in \mathbb{N}_0$

c) Geben sie die reflexiv-transitive Hülle E_k^* in Mengenschreibweise an.

Lösung: $E_k^* = \{(w_1, w_2) \mid w_1 \in V_k \wedge w_2 \in V_k \wedge \exists w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \colon w_2 = w_1 w\}$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Punkte

Gegeben sei eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_+$. Die Abbildung $S\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ sei induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} S(0) &= 1, \\ \forall k \in \mathbb{N}_0\colon S(k+1) &= a^{k+1} + S(k). \end{aligned}$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1.$$

Lösung

Induktionsanfang: $k = 0$: Dann ist $(a-1)S(0) = a - 1 = a^{0+1} - 1$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges aber festes k gelte:
$(a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$

Induktionsschluss: $k \rightsquigarrow k+1$: zu zeigen: $(a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$.

Es ist

$$\begin{aligned} (a-1)S(k+1) &= (a-1)(a^{k+1} + S(k)) && \text{nach Definition} \\ &= (a-1)a^{k+1} + (a-1)S(k) \\ &= a \cdot a^{k+1} - a^{k+1} + a^{k+1} - 1 && \text{nach Ind.voraussetzung} \\ &= a^{(k+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Punkte

Aufgabe 6 (2 + 3 + 4 = 9 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik G mit Nichtterminalsymbolen

$$N = \{S, Q, V, K, R\},$$

Terminalsymbolen

$$T = \{\,\forall\,,\ \exists\,,\ \mathbf{x}\,,\ \mathbf{y}\,,\ \mathbf{z}\,,\ (\,,\ )\,,\ \wedge\,,\ \vee\,,\ \Rightarrow\,,\ =\,,\ \leq\,\},$$

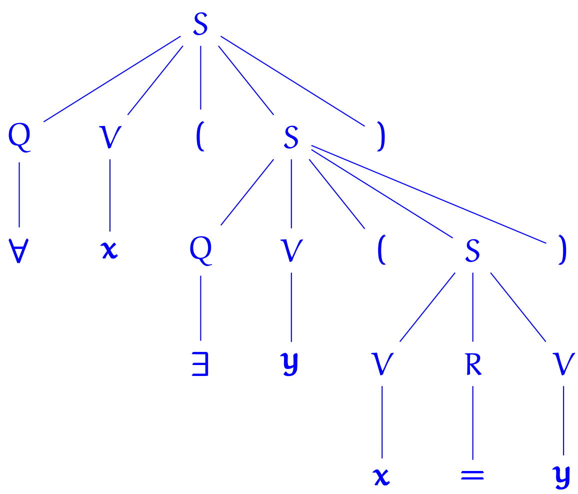
Startsymbol S und Produktionsmenge

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \to QV(S) \mid (S)K(S) \mid VRV\,, \\ & Q \to \forall \mid \exists\,, \\ & V \to \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \mid \mathbf{z}\,, \\ & K \to \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow\,, \\ & R \to = \mid \leq\ \}. \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort

$$\forall\mathbf{x}(\exists\mathbf{y}(\mathbf{x} = \mathbf{y}))$$

Lösung



b) Es bezeichne L die von G erzeugte formale Sprache $L(G)$.

Beweisen Sie, dass

$$\{(\}\cdot L\cdot\{)\}\cdot\{\wedge,\vee,\Rightarrow\}\cdot\{(\}\cdot L\cdot\{)\} \subseteq L$$

gilt.

Lösung

Es gibt die Produktion $S \to (S)K(S)$. Aus S sind alle Wörter in L ableitbar und aus K die Wörter in $\{\wedge,\vee,\Rightarrow\}$. Folglich sind aus $(S)K(S)$

und wegen der genannten Produktion daher auch aus S alle Wörter in $\{\mathtt{(}\} \cdot L \cdot \{\mathtt{)}\} \cdot \{\wedge, \vee, \Rightarrow\} \cdot \{\mathtt{(}\} \cdot L \cdot \{\mathtt{)}\}$ ableitbar. Diese Sprache ist also Teil von L.

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik H derart an, dass $L(H)$ die Sprache aller mathematischen Terme über den Zeichen

$$\mathtt{x}\,,\,\mathtt{y}\,,\,\mathtt{z}\,,\,+\,,\,\cdot\,,\,\mathtt{(}\text{ und }\mathtt{)}$$

ist, wobei jeder nichtleere Teilterm geklammert werden muss. Beispielsweise soll $L(G)$ die Terme

$$\varepsilon\;,\;(\mathtt{x})\;,\;((\mathtt{x})+(\mathtt{y}))\;,\;((\mathtt{x})+((\mathtt{y})\cdot(\mathtt{z})))\;,\;(((\mathtt{x})+(\mathtt{y}))\cdot(\mathtt{z}))$$

und so weiter enthalten.

Lösung

Zum Beispiel leistet die Grammatik $H = (N, T, S, P)$ mit

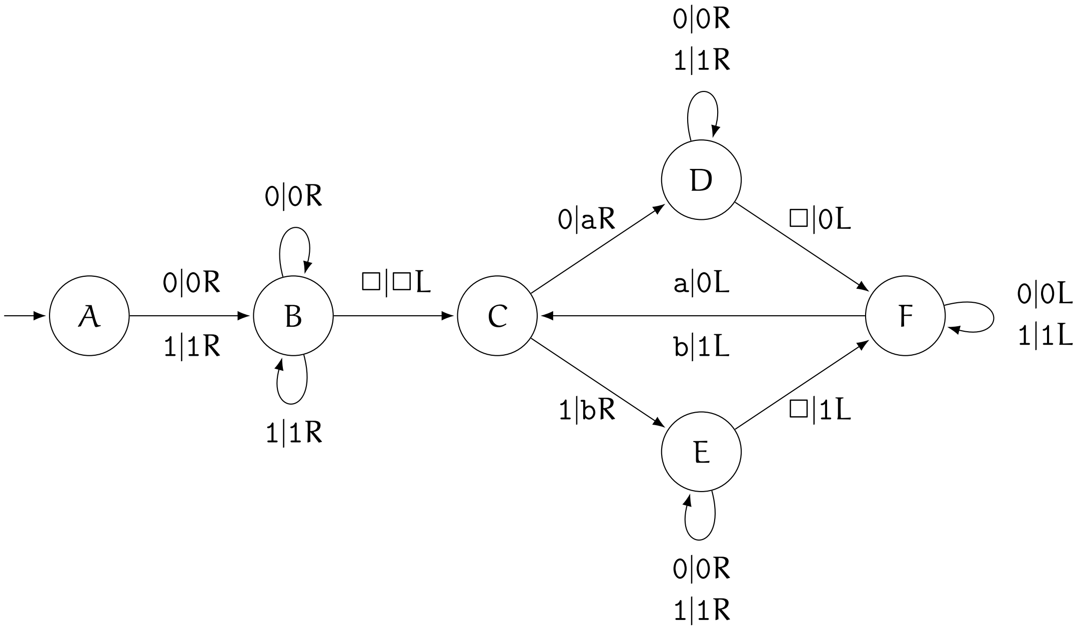
$$\begin{aligned} N &= \{S, A, V, K\} \\ T &= \{\,\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}, +, \cdot, \mathtt{(}\,, \mathtt{)}\,\} \\ \text{und} \qquad P &= \left\{ \begin{array}{l} S \to \varepsilon \mid A \\ A \to (V) \mid (AKA) \\ K \to + \mid \cdot \\ V \to \mathtt{x} \mid \mathtt{y} \mid \mathtt{z} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

das Gewünschte.

Punkte

Aufgabe 7 (3 + 1 + 3 = 7 Punkte)

Gegeben sei die Turingmaschine T mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, C, D, E, F\}$, Anfangszustand A und Bandalphabet $X = \{0, 1, a, b, \square\}$, deren Arbeitsweise durch das folgende Diagramm festgelegt ist:



a) Geben Sie für das Eingabewort 0100 (umgeben von Blanksymbolen) folgende Konfigurationen an:

- die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum ersten Mal von Zustand C nach Zustand D gewechselt hat;
- die Konfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine zum ersten Mal von Zustand C nach Zustand E gewechselt hat;
- die Endkonfiguration, die vorliegt, nachdem die Turingmaschine gehalten hat.

Nutzen Sie dazu die Raster auf der Folgeseite. Notieren Sie nur den Teil des Bandes, der *keine* Blanksymbole enthält.

Lösung: siehe nächste Seite

b) Erläutern Sie knapp für jedes Eingabewort $w \in \{0, 1\}^*$ die Gestalt des Wortes auf dem Band der Endkonfiguration.

Lösung: Am Ende steht auf dem Band ww^R, d. h. w gefolgt vom Spiegelbild von w.

c) Geben Sie eine scharfe obere asymptotische Schranke für die Laufzeit der Turingmaschine in Abhängigkeit der Länge $n \in \mathbb{N}_0$ des Eingabewortes an.

Lösung: $O(n^2)$
Erklärung (nicht verlangt): Schlimmstenfalls fährt die TM für jedes Eingabesymbol über (ca.) $2n$ Felder hin und zurück. Und für die ersten $n/2$ Symbole sind es jeweils mindestens $n/2$ Felder.

Platz für Antworten zu Aufgabe 7a): Schreiben Sie jeweils in die untere Zeile eines Kastens die Bandbeschriftung und in die obere über dem aktuell besuchten Feld den Zustand.

Anfangskonfiguration:

	A								
	0	1	0	0					

Nach dem ersten Wechsel von C nach D:

					D				
	0	1	0	a					

Nach dem ersten Wechsel von C nach E:

			E						
	0	b	0	0	0	0			

Endkonfiguration:

C									
	0	1	0	0	0	0	1	0	