Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 9

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 18. Dezember 2013

Abgabe: 10. Januar 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9:	/ 19
Blätter 1 – 9:	/ 167

Aufgabe 9.1 (3 Punkte)
Gegeben sei der folgende Algorithmus:

$x \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $i-1$ **do**
    for $k \leftarrow j$ **to** $n-1$ **do**
      $x \leftarrow x+1$
    od
  od
od

Es bezeichne $f(n)$ den Wert der Variablen x nach Beendigung der Schleife in Abhängigkeit von n.

a) Beweisen Sie, dass $f(n) \in O(n^3)$ ist.
b) Beweisen Sie, dass $f(n) \in \Omega(n^3)$ ist.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)
Betrachten Sie folgende kleine Variante des Algorithmus von Warshall, der eine Folge von Matrizen W_0, W_1, usw. bis W_n berechnet:

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**

$$W_0[i,j] \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ A[i,j] & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

  od
od

for $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
      $W_{k+1}[i,j] \leftarrow \max(\, W_k[i,j], \min(W_k[i,k], W_k[k,j])\,)$
    od
  od
od

Der Algorithmus soll angewendet werden auf den Graphen $G = (\mathbb{G}_6, E)$ mit Kantenmenge $E = \{(0,1), (0,3), (1,2), (1,4), (2,0), (2,5)\}$

a) Geben Sie W_0 nach Ausführung des Algorithmus an.
b) Geben Sie W_1 nach Ausführung des Algorithmus an.
c) Für welchen Wert m der Laufvariable k ergibt sich im Algorithmus für den Beispielgraphen G zum letzten Mal eine Matrix W_m, die sich von der „vorhergehenden“ Matrix M_{m-1} unterscheidet?
d) Geben Sie alle weiteren Matrizen W_2 bis W_m an (für den Wert m aus der vorangegangenen Teilaufgabe).

Aufgabe 9.3 (5 Punkte)
Geben Sie für jede der nachfolgend definierten Funktionen $f_i\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jeweils explizit eine Funktion $g_i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, so dass $f_i(n) \in \Theta(g_i(n))$ ist.
Die Funktionen g_i müssen explizit angegeben werden und dürfen nicht rekursiv definiert sein. Antworten der Form „$g_1 = f_1$“ sind also unzulässig.

a) $f_1(0) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_1(n+1) = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} f_1(n)$.

b) $f_2(0) = 2$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_2(n+1) = 1 + (-1)^{f_2(n)/2}$.

c) $f_3(0) = 4711$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_3(n+1) = \lceil \log_2(1 + f_3(n)) \rceil$.

d) $f_4(0) = 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_4(n+1) = f_4(n) + 2n + 1$.

e) $f_5(0) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_5(n+1) = f_5(n) + \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Hinweis: $\lceil x \rceil$ bedeute „aufrunden“ von x auf die nächstgrößere ganze Zahl; für $x \in \mathbb{N}_0$ sei $\lceil x \rceil = x$.

Aufgabe 9.4 (3 Punkte)
Alle nachfolgend benutzten Funktionen seien von der Form $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie: Wenn $g_1 \preceq f_1$ ist, und wenn $g_1 \asymp g_2$ und $f_1 \asymp f_2$, dann gilt auch $g_2 \preceq f_2$.

Aufgabe 9.5 (4 Punkte)
Die Funktion $\log_2^*\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist wie folgt definiert:

$$\log_2^* n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 1 \\ 1 + \log_2^*(\log_2 n) & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\log_2^*(65536)$ und geben Sie $\log_2^*(65537)$ an.
b) Wieviele Ziffern hat die Dezimaldarstellung der kleinsten Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\log_2^*(m) = 6$?
c) Definieren Sie eine Funktion $\exp_2^*\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\log_2^*(\exp_2^*(n)) = n$.
d) Beweisen Sie, dass $\log_2^* n \notin O(1)$ ist.