Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 6

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 27. November 2013

Abgabe: 6. Dezember 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 6:	/ 20
Blätter 1 – 6:	/ 112

Aufgabe 6.1 (2+3+2=7 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um die Zahlendarstellung mit Hilfe der Ziffern aus dem Alphabet $Z = \{\mathtt{\bar{1}}, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ mit den Wertigkeiten

- $\mathrm{num}(\mathtt{\bar{1}}) = -1$, • $\mathrm{num}(\mathtt{0}) = 0$, • $\mathrm{num}(\mathtt{1}) = 1$

und den Festlegungen

- $\mathrm{Num}(\varepsilon) = 0$ und • $\forall w \in Z^* \, \forall x \in Z\colon \mathrm{Num}(wx) = 3 \cdot \mathrm{Num}(w) + \mathrm{num}(x)$

Auf den Vorlesungsfolien wurde die „schriftliche Addition“ zweier solcher Zahlen etwas ungenau vorgeführt.
Gegeben sei die Funktion $\bar{S}\colon Z^3 \to M$ mit $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und $\bar{S}(a, b, c) = \mathrm{num}(a) + \mathrm{num}(b) + \mathrm{num}(c)$ für alle $a, b, c \in Z$.

a) Geben Sie die Wertetabellen für zwei Funktionen $\mathbf{S}'\colon M \to Z$ und $\mathbf{C}'\colon M \to Z$, so dass für die Funktionen $\mathbf{S} = \mathbf{S}' \circ \bar{S}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{C}' \circ \bar{S}$ beim schriftlichen Addieren gilt:

$$\begin{array}{cc}
\text{Stelle} & \text{Stelle} \\
p-1 & p \\
 & \\
 & a_p \\
 & b_p \\
\mathbf{C}(a_p, b_p, c_p) & c_p \\
\hline
 & \mathbf{S}(a_p, b_p, c_p)
\end{array}$$

Dabei sind a_p und b_p die beiden mit dem Übertrag c_p von der nächsten Stelle weiter rechts zu addierenden Ziffern, $\mathbf{S}(a_p, b_p, c_p)$ die Ziffer, die man unter den Strich schreibt, und $\mathbf{C}(a_p, b_p, c_p)$ ist der Übertrag für die nächste Stelle weiter links.
Wir nehmen nun an, dass x und y zwei Wörter *gleicher Länge* n seien. Gehen Sie davon aus, dass die ersten Ziffern von x und y $\mathtt{0}$ sind, also $x, y \in \{\mathtt{0}\} \cdot Z^{n-1}$.
Fassen Sie x und y wie am Anfang der Vorlesung als Abbildungen mit Definitionsbereich $\mathbb{G}_n$ auf. Dann ist zum Beispiel $x(0)$ das erste Symbol links in x und $y(n-1)$ das letzte Symbol rechts in y.

b) Ergänzen Sie die Lücken im folgenden Algorithmus so, dass am Ende im Wort $z \in Z^*$ die eine Repräsentation der Zahl $\mathrm{Num}(x) + \mathrm{Num}(y)$ steht. Benutzen Sie die Funktionen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{C}$ aus Teilaufgabe a).

⟨*Eingabe sind Wörter* $x = x(0) \cdots x(n-1)$ *und* $y = y(0) \cdots y(n-1)$ ⟩
$z \leftarrow \boxed{\qquad\qquad}$
$c \leftarrow \boxed{\qquad\qquad}$
$p \leftarrow \boxed{\qquad\qquad}$ ⟨*betrachtete Position*⟩
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $z \leftarrow \boxed{\qquad\qquad} \cdot \boxed{\qquad\qquad}$ ⟨*Konkatenation*⟩
  $c \leftarrow \boxed{\qquad\qquad}$
  $p \leftarrow \boxed{\qquad\qquad}$
od

c) Warum wurde vorausgesetzt, dass x und y mit einer führenden $\mathtt{0}$ beginnen? Welche Anweisung muss man nach Ende der Schleife ergänzen, damit diese Voraussetzung nicht mehr nötig ist?

Lösung 6.1

a) Tabellen:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbf{S}'(x)$	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0
$\mathbf{C}'(x)$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	0	0	1	1

b) Ergänzen Sie die Lücken im folgenden Algorithmus so, dass am Ende im Wort $z \in Z^*$ die eine Repräsentation der Zahl $\text{Num}(x) + \text{Num}(y)$ steht. Benutzen Sie die Funktionen **S** und **C** aus Teilaufgabe a).

$\langle$*Eingabe sind Wörter* $x = x(0) \cdots x(n-1)$ *und* $y = y(0) \cdots y(n-1)$ $\rangle$
$z \leftarrow \varepsilon$
$c \leftarrow 0$
$p \leftarrow n - 1$ $\langle$*betrachtete Position*$\rangle$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
  $z \leftarrow \mathbf{S}(x(p), y(p), c) \cdot z$ $\langle$*Konkatenation*$\rangle$
  $c \leftarrow \mathbf{C}(x(p), y(p), c)$
  $p \leftarrow p - 1$
od

c) Wenn x und y nicht beide mit einer führenden `0` beginnen, kann es passieren, dass das Ergebnis ein Zeichen länger ist als x und y. Dann ist am Ende der Schleife c nicht Null.

In diesem Fall sollte man nach der Schleife noch die Anweisung

$z \leftarrow c \cdot z$

ergänzen.

Aufgabe 6.2 (5 Punkte)
Es sei $h : A^* \to B^*$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie

$$\forall w_1 \in A^* \colon \forall w_2 \in A^* \colon h(w_1 w_2) = h(w_1) h(w_2)$$

Hinweis: vollständige Induktion über die Länge von w_2.

Lösung 6.2
Es sei $w_1 \in A^*$ ein beliebiges Wort. Wir zeigen durch vollständige Induktion

$$\forall w_2 \in A^* \colon h(w_1 w_2) = h(w_1) h(w_2)$$

Induktionsanfang: $w_2 = \varepsilon$: Dann ist

$$h(w_1 w_2) = h(w_1 \varepsilon) = h(w_1) = h(w_1)\varepsilon = h(w_1) h(w_2)$$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges aber festes Wort w_2 gelte: $h(w_1 w_2) = h(w_1)h(w_2)$.

Induktionsschluss zu zeigen: für jedes $x \in A$ gilt $h(w_1 \cdot (w_2 x)) = h(w_1)h(w_2 x)$. Das geht so

$$\begin{aligned} h(w_1 \cdot (w_2 x)) &= h((w_1 w_2)x) \\ &= h(w_1 w_2)h(x) && \text{nach Def. Homomorphismus} \\ &= h(w_1)h(w_2)h(x) && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= h(w_1)h(w_2 x) && \text{nach Def. Homomorphismus} \end{aligned}$$

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Es sei A das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $f\colon A^* \to A^*$ die Abbildung

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \forall w \in A^* \; \forall x \in A\colon f(wx) &= xf(w)x \end{aligned}$$

a) Ist f surjektiv?
b) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus Teilaufgabe a).
c) Ist f ein Homomorphismus?
d) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus Teilaufgabe c).

Lösung 6.3

a) Nein, f ist *nicht* surjektiv.
b) Wie man sieht ist $f(w)$ entweder das leere Wort (falls $w = \varepsilon$), oder es hat Länge $|f(wx)| = |xf(w)x| \geq 2$. Also ist nie $f(w) \in A$, also ist f nicht surjektiv.
c) Nein, f ist *kein* Homomorphismus.
d) Für $x \in A$ ist $f(x) = xf(\varepsilon)x = xx$. Also ist zum Beispiel $f(\mathtt{a})f(\mathtt{b}) = \mathtt{aabb}$. Das ist aber *verschieden* von $f(\mathtt{ab}) = \mathtt{a}f(\mathtt{b})\mathtt{a} = \mathtt{abba}$.

Aufgabe 6.4 (2+2=4 Punkte)

a) Konstruieren Sie den Huffman-Baum für das Wort $w = \mathtt{dadbdadcdadbdad}$.

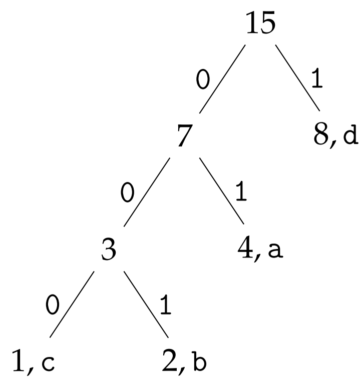
b) Geben Sie an, welche Huffman-Codierungen für die in w vorkommenden Symbole man aus dem Baum in Teilaufgabe a) ablesen kann.

Lösung 6.4

a) Zunächst bestimmt man die Häufigkeiten der Symbole in w:

x	a	b	c	d
$N_x(w)$	4	2	1	8

ein möglicher Baum (weitere Bäume erhält man durch Vertauschen von linken und rechten Ästen):



b) resultierender Homomorphismus:

x	a	b	c	d
$h(w)$	01	001	000	1