# Grundbegriffe der Informatik
# Aufgabenblatt 5

| Matr.nr.: | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 20. November 2013

Abgabe: 29. November 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 5: / 20

Blätter 1 – 5: / 92

---

**Aufgabe 5.1 (2 Punkte)**
Der Aufbau eines Aufgabenblattes für GBI kann wie folgt skizziert werden:

> Ein Aufgabenblatt besteht aus einem Deckblatt und daran anschließend einer Aufgabe oder mehreren. Jede Aufgabe beginnt mit einer Einleitung gefolgt von entweder einer Aufgabenstellung oder mindestens zwei Teilaufgabenstellung. Am Ende einer Aufgabenstellung oder einer Teilaufgabenstellung wird manchmal ein Hinweis für die Lösung gegeben.

Übersetzen Sie die obige Beschreibung der Grobstruktur in Produktionen einer kontextfreien Grammatik. Geben Sie bitte auch Startsymbol und verwendete Nichtterminalsymbole an. Hinweis: Sie müssen *nicht mehr auszudrücken* als oben sizziert. Verwenden Sie der Einfachheit halber nur ein Terminalsymbol $\mathtt{a}$ überall dort, wo Sie nicht weiter spezifizieren.

**Lösung 5.1**
Als Grammatik nehmen wir $G = (N, \{\mathtt{a}\}, \langle \mathit{Aufgabenblatt} \rangle, P)$. Dabei ist $N = \{\langle \mathit{Aufgabenblatt} \rangle, \langle \mathit{Deckblatt} \rangle, \langle \mathit{Aufgaben} \rangle, \langle \mathit{Aufgabe} \rangle, \langle \mathit{Einleitung} \rangle, \langle \mathit{Aufgabentext} \rangle, \langle \mathit{Aufgabenstellung} \rangle, \langle \mathit{Teilaufgabenstellung} \rangle, \langle \mathit{Hinweis} \rangle\}$. Die Produktionenmenge $P = P_1 \cup P_2$ besteht aus zwei Teilen:

$$
\begin{aligned}
P_1 = \{ \langle \mathit{Aufgabenblatt} \rangle &\to \langle \mathit{Deckblatt} \rangle \langle \mathit{Aufgaben} \rangle \\
\langle \mathit{Aufgaben} \rangle &\to \langle \mathit{Aufgabe} \rangle \mid \langle \mathit{Aufgaben} \rangle \langle \mathit{Aufgabe} \rangle \\
\langle \mathit{Aufgabe} \rangle &\to \langle \mathit{Einleitung} \rangle \langle \mathit{Aufgabentext} \rangle \\
\langle \mathit{Aufgabentext} \rangle &\to \langle \mathit{Aufgabenstellung} \rangle \langle \mathit{Hinweis} \rangle \\
&\quad \mid \langle \mathit{Teilaufgabenstellung} \rangle \langle \mathit{Hinweis} \rangle \langle \mathit{MehrTeile} \rangle \\
\langle \mathit{MehrTeile} \rangle &\to \langle \mathit{Teilaufgabenstellung} \rangle \langle \mathit{Hinweis} \rangle \\
&\quad \mid \langle \mathit{Teilaufgabenstellung} \rangle \langle \mathit{Hinweis} \rangle \langle \mathit{MehrTeile} \rangle \\
\langle \mathit{Hinweis} \rangle &\to \langle \mathit{Hinweis} \rangle \mid \varepsilon \\
\}
\end{aligned}
$$

$P_2$ enthalte genau die Produktionen $X \to \mathtt{a}$ für jedes Nichtterminalsymbol $X$, das in $P_1$ nicht auf der linken Seite vorkommen.

**Aufgabe 5.2 (1+2+2+1+3=9 Punkte)**
Beschreiben Sie präzise, welche formalen Sprachen die folgenden Grammatiken $G_1$, $G_2$ und $G_3$ erzeugen.

a) $G_1 = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}A|\mathtt{b}B, A \to S\mathtt{a}, B \to S\mathtt{b}\})$
b) $G_2 = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to SS|\mathtt{a}S\mathtt{b}|\mathtt{b}S\mathtt{a}|\varepsilon\})$
c) $G_3 = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b}|\mathtt{b}S\mathtt{a}|\varepsilon\})$
d) Geben Sie ein Wort $w$ der Länge 6, das zwar nicht von $G_3$ erzeugt wird aber von $G_2$, und geben Sie eine Ableitung mit $G_2$ des Wortes an.
e) Erklären Sie für die Grammatik aus Teilaufgabe b), wie man zu einem beliebigen Wort $w \in L(G_2)$ eine Ableitung von $w$ gemäß $G_2$ konstruieren kann.

**Lösung 5.2**

a) $L(G_1) = \{\}$
b) $L(G_2) = \{w \mid N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)\}$. Das ist die Sprache aller Wörter mit gleich vielen a und b.
c) Die Grammatik $G_3$ erzeugt die Sprache aller Wörter $w$, die folgende Eigenschaft haben: Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i < |w|/2$ ist $w(i) \neq w(n-1-i)$, also sozusagen „das $i$-te Symbol von vorne“ und „das $i$-te Symbol von hinten“ sind verschieden.
d) $S \Rightarrow SS \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b}S \Rightarrow \mathtt{ab}S \Rightarrow \mathtt{abb}S\mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{abbb}S\mathtt{aa} \Rightarrow \mathtt{abbbaa}$
e) (i) Man geht das zu erzeugende Wort von links nach rechts durch und zerteilt es in möglichst kurze aber nichtleere Teilwörter, die gleich viele a und b enthalten.

   Beispiel: abbbaa wird aufgeteilt in ab · bbaa.

   Für jedes solche Teilwort gilt: erstes und letztes Symbol sind verschieden.

   (ii) Wenn man in Schritt (i) $w$ in insgesamt $k$ Teilwörter $w_1, \ldots w_k$ aufgespalten hat, dann ergibt sich eine Ableitung gemäß $G_2$ wie folgt:

   - Als erstes wendet man $k-1$ mal die Produktion $S \to SS$ an und erhält so $S \Rightarrow^* S^k$
   - Aus dem $i$-ten Symbol $S$ leitet man nun Teilwort $w_i$ ab. Als erstes wendet man diejenige der Produktionen $S \to \mathtt{a}S\mathtt{b}$ bzw. $S \to \mathtt{b}S\mathtt{a}$, die erstes und letztes Symbol von $w_i$ richtig erzeugen.
   - Das Infix von $w_i$ ohne erstes und letztes Symbol ist wieder ein Wort mit gleichen vielen a und b, das man analog nach dem eben in (i) und (ii) beschriebenen Verfahren ableitet.

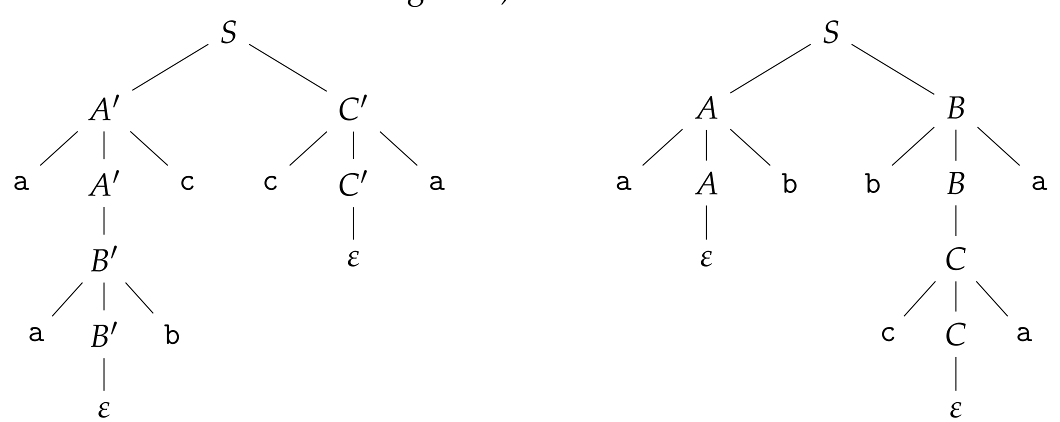
**Aufgabe 5.3 (1+2+1=4 Punkte)**

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die formale Sprache $L = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^{k+m}\mathtt{a}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die formale Sprache $L = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^x\mathtt{c}^y\mathtt{a}^m \mid k, m, x, y \in \mathbb{N}_0 \wedge k + m = x + y\}$ erzeugt.
c) Zeichnen Sie die Ableitungsbäume der Wörter `aabcca` und `abbcaa` gemäß Ihrer Grammatik aus Teilaufgabe b).

**Lösung 5.3**

a) $G_1 = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$ mit $P = \{S \to AB, A \to \mathtt{a}A\mathtt{b}|\varepsilon, B \to \mathtt{b}B\mathtt{a}|\varepsilon\}$
b) $G_2 = (\{S, A, B, C, A', B', C'\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, S, P)$ mit $P = \{S \to AB, A \to \mathtt{a}A\mathtt{b}|\varepsilon, B \to \mathtt{b}B\mathtt{a}|C, C \to \mathtt{c}C\mathtt{a}|\varepsilon\} \cup \{S \to A'C', A' \to \mathtt{a}A'\mathtt{c}|B', B' \to \mathtt{a}B'\mathtt{b}|\varepsilon, C' \to \mathtt{c}C'\mathtt{a}|\varepsilon\}$
Die erste Teilmenge von Produktionen ist für Wörter mit $k \leq x$. Die zweite Teilmenge für Wörter mit $k > x$; in dem Fall ist dann $y > m$.
c) Zeichnen Sie die Ableitungsbäume der Wörter `aabcca` und `abbcaa` gemäß Ihrer Grammatik aus Teilaufgabe b).



**Aufgabe 5.4 (1+2+2=5 Punkte)**
Es seien $A$, $B$ und $C$ drei Mengen.

a) Definieren Sie eine bijektive Abbildung $S : C^{A\times B} \to \left(C^B\right)^A$.
Hinweis: Definieren Sie zunächst für jede Abbildung $f : A \times B \to C$ und jedes $a \in A$ eine Abbildung $f_a \colon B \to C$.
b) Beweisen Sie, dass Ihre Abbildung $S$ aus Teilaufgabe a) injektiv ist.
c) Beweisen Sie, dass Ihre Abbildung $S$ aus Teilaufgabe a) surjektiv ist.

**Lösung 5.4**

a) Für jede Abbildung $f : A \times B \to C$ und jedes $a \in A$ sei $f_a$ die Abbildung $f_a \colon B \to C : b \mapsto f(a, b)$; also $f_a(b) = f(a, b)$.
Dann ist $S : C^{A\times B} \to \left(C^B\right)^A$ so definiert, dass $S(f)$ die Abbildung $a \mapsto f_a$ ist. Also $S(f)(a) = f_a$.
b) Es seien $f, g : A \times B \to C$ zwei Abbildungen mit $f \neq g$. Dann gibt es $(a, b) \in A \times B$ mit $f(a, b) \neq g(a, b)$. Es ist also $f_a(b) \neq g_a(b)$.
Es seien $f, g : A \times B \to C$ zwei Abbildungen mit $S(f) = S(g)$. Dann ist also für alle $a \in A$ auch $S(f)(a) = S(g)(a)$, also für alle $a$ auch $f_a = g_a$. Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ ist daher $f_a(b) = g_a(b)$, also $f(a, b) = g(a, b)$. Also ist $f = g$.

c) Es sei $h \in (C^B)^A$. Man muss zeigen, dass es ein $f \in C^{A \times B}$ gibt mit $S(f) = h$.
Man definiere $f$ so: $\forall a \in A \forall b \in B \colon f(a, b) = h(a)(b)$.
Zeige: $S(f) = h$: Nach Definition von $f$ ist für alle $a \in A$ gerade $f_a$ die Abbildung mit $f_a(b) = h(a)(b)$, also $f_a = h(a)$, also $S(f)(a) = h(a)$. Also ist $S(f) = h$.