Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 30. Oktober 2013

Abgabe: 8. November 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2: / 20

Blätter 1 – 2: / 36

Aufgabe 2.1 (1+1+2=4 Punkte)
Es sei A ein beliebiges Alphabet. Beweisen Sie unter Verwendung der Definition von Potenzen von Wörtern, der Ergebnisse aus der Vorlesung und der Assoziativität der Konkatenation von Wörtern, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Wörter $w \in A^*$ gilt:

a) $w^n \cdot w^0 = w^{n+0}$
b) $w^n \cdot w^1 = w^{n+1}$
c) $w^n \cdot w^2 = w^{n+2}$

Rechnen Sie bitte in allen drei Fällen ausführlich!

Aufgabe 2.2 (1+2=3 Punkte)
Bei den beiden folgenden Teilaufgaben müssen M und $\diamond$ nur die geforderten Eigenschaften haben. Alles andere ist egal.

a) Geben Sie eine Menge M und eine binäre Operation $\diamond\colon M \times M \to M$ an, die nicht kommutativ ist. Geben Sie konkrete Werte $x, y \in M$ an, mit deren Hilfe man belegen kann, dass $\diamond$ nicht kommutativ ist.
b) Geben Sie eine Menge M und eine binäre Operation $\diamond\colon M \times M \to M$ an, die zwar kommutativ aber nicht assoziativ ist. Geben Sie konkrete Werte $x, y, z \in M$ an, mit deren Hilfe man belegen kann, dass $\diamond$ nicht assoziativ ist.

Aufgabe 2.3 (1+1+1+1+2=6 Punkte)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und die Abbildung $f\colon A^+ \to A^+$, die wie folgt „arbeitet“: Aus einem nichtleeren Wort w entsteht $f(w)$, indem man

- jede $\mathtt{0}$ in w durch das Wort $\mathtt{01}$ ersetzt und
- jede $\mathtt{1}$ in w durch eine $\mathtt{0}$.

Zum Beispiel ist $f(\mathtt{0010}) = \mathtt{0101001}$.

a) Es sei $w_0 = \mathtt{0}$. Geben Sie die folgenden Wörter explizit an:
• $w_1 = f(w_0)$ • $w_2 = f(w_1)$ • $w_3 = f(w_2)$ • $w_4 = f(w_3)$ • $w_5 = f(w_4)$
b) Geben Sie $f(\mathtt{10})$, $f(\mathtt{11})$ und $f(\mathtt{1011})$ an.
c) Es seien $v \in A^+$ und $v' \in A^+$ zwei Wörter. Was können Sie aufgrund der „Arbeitsweise“ von f über den Funktionswert $f(vv')$ aussagen?
d) Was fällt Ihnen an den Wörtern $w_0, \dots, w_5$ auf?
e) Beweisen Sie: Wenn v Anfangsstück des Wortes $f(v)$ ist, dann ist auch $f(v)$ Anfangsstück des Wortes $f(f(v))$.

Aufgabe 2.4 (2+1+1+2+1=7 Punkte)
Es sei M eine beliebige nichtleere Menge und $f\colon M \to M$ eine Abbildung auf M. Eine Folge von Teilmengen $T_n \subseteq M$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist induktiv wie folgt definiert:

$$T_0 = M$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon T_{n+1} = \{f(x) \mid x \in T_n\}$$

a) Wählen Sie $M = \mathbb{G}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

- Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{G}_4 \to \mathbb{G}_4$ an, bei der alle Mengen T_n gleich sind.
- Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{G}_4 \to \mathbb{G}_4$ an, bei der *nicht* alle Mengen T_n gleich sind. Geben Sie bitte alle Teilmengen von $\mathbb{G}_4$ an, die vorkommen.

b) Wählen Sie $M = \mathbb{N}_0$ und geben eine Abbildung f an, so dass

- die Mengen T_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ unendlich groß sind und
- außerdem gilt: $\forall n \in \mathbb{N}_0\colon T_{n+1} \subsetneq T_n$. Das Zeichen $\subsetneq$ bedeutet, dass T_{n+1} Teilmenge von T_n ist, aber nicht gleich T_n ist, also echt kleiner.

(Anmerkung: Manchmal schreibt man statt $\subsetneq$ auch $\subsetneqq$.)

c) Angenommen, man weiß schon, dass für eine bestimmte fest Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $T_{k+1} \subseteq T_k$ ist. Beweisen Sie, dass dann auch $T_{k+2} \subseteq T_{k+1}$ ist.

d) Angenommen, man weiß schon, dass für eine bestimmte fest Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $T_{k+1} = T_k$ ist. Beweisen Sie, dass dann auch $T_{k+2} = T_{k+1}$ ist.

e) Angenommen M ist eine *endliche* Menge mit genau k Elementen. Was können Sie über die Menge T_k aussagen?