**Aufgabe 1** (10 Punkte)
Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

*Hinweis:* Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

a) $\forall n, k \in \mathbb{N}_+ : n \bmod k + n \operatorname{div} k = n$.
falsch

b) $\exists k \in \mathbb{N}_0 : n \in O((\log_2 n)^k)$.
falsch

c) $\log_2(x^4) \in O(\log_2 x)$.
wahr

d) $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$W$ kann Wegematrix eines Graphen sein.
wahr

e) Das Umbennen der Knoten eines Graphen entspricht dem Vertauschen der Zeilen der Wegematrix.
falsch

f) Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum, wenn gilt:
$\forall x \in V : d^-(x) < 2$.
falsch

g) $((A \Rightarrow B) \land (A \Rightarrow C) \land (A \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (B \lor C \lor \neg B \lor A)$
falsch

h) $L_2$ sei eine reguläre Sprache und $L_1 \subseteq L_2$.
$L_1 \cap L_2$ ist regulär.
falsch

i) Sei $L = \{w\}$. Die Nerode-Äquivalenzrelation $R_L$ hat $|w| + 2$ Äquivalenzklassen.
wahr

j) Es existieren reguläre Sprachen $L_1, L_2$ und ein Homomorphismus $h : h(L_1) = L_2$, so dass gilt:
$|L_1| = \infty$ und $|L_2| = n$, mit $n \in \mathbb{N}_0$.
wahr

**Aufgabe 2** (9 Punkte)

a) Zeichnen Sie alle ungerichteten nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten, für die gilt:
Genau ein Knoten besitzt Grad 4, alle anderen Knoten haben Grad 2.

*Hinweis:* Es gibt Punktabzug für Graphen, die nicht verlangt waren. Die gesamte Teilaufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen die Knoten nicht zu benennen. [*4 Punkte*]

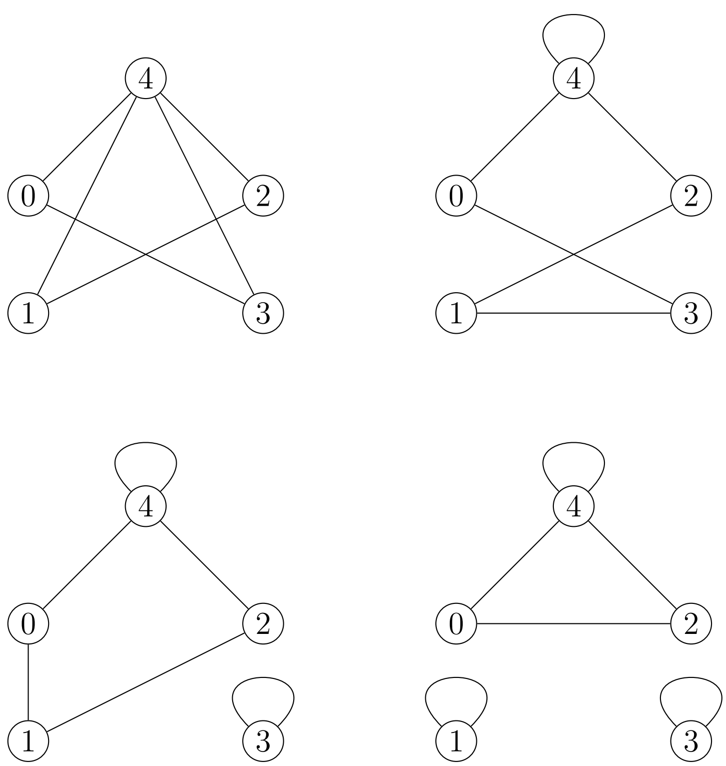
b) In dieser Teilaufgabe geht es um gerichtete Graphen $G = (V, E)$.
Geben Sie eine kurze formale mathematische Definition an für den Begriff *Ausgangsgrad* $d^+(x)$ eines Knotens x. [*2 Punkte*]

c) Zeigen oder widerlegen Sie:

In jedem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit mindestens zwei Knoten gibt es zwei verschiedene Knoten $x, y$ mit $d^+(x) = d^+(y)$, wenn es keinen Knoten $z \in V$ mit $d^+(z) = 0$ gibt.

[*3 Punkte*]

*Lösungsvorschlag:*




a)

b) $d^+(x) = |\{y \mid (x,y) \in E\}|$

c) Widerlegen durch Gegenbeispiel: 

**Aufgabe 3** (12 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet $A = \{\texttt{0,1,2}\}$. Weiter sei $f(n)$ die Anzahl der Wörter $w \in A^*$ mit Länge $n \in \mathbb{N}_+$, die das Teilwort $w_t = \texttt{22}$ nicht enthalten.

a) Berechnen Sie $f(1), f(2)$ und $f(3)$. *[2 Punkte]*

b) Es gelte zusätzlich $|w| \geq 3$. Was sind die beiden letzten Zeichen für solch ein $w$, das mit 2 endet? *[0,5 Punkte]*

c) Es gelte zusätzlich $|w| \geq 3$. Was sind die 3 letzten Zeichen für solch ein $w$, das mit 2 endet? *[1 Punkt]*

d) Geben Sie eine rekursive Definition für $f(n)$ an.

   *Hinweis:* Überlegen Sie sich dabei wie sich die Anzahl der Wörter verändert, wenn Sie $w$ um ein Zeichen erweitern. *[4,5 Punkte]*

e) Zeigen Sie per Induktion: $\forall n \geq 2 : f(n) \geq 2^{n+1}$. *[4 Punkte]*

*Lösungsvorschlag:*

a) $f(1) = 3,\ f(2) = 8,\ f(3) = 22$

b) 02 oder 12

c) Möglichkeiten für die 3 letzten Zeichen sind: $\{002, 102, 202, 012, 112, 212\}$

d) $f(1) = 3,\ f(2) = 8$

   $\forall n \geq 3 : f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 2 \cdot f(n-2)$

   Erklärung (nicht verlangt): Für ein Wort der Länge $n-1$, welches das Teilwort 22 nicht enthält, kann man ohne Probleme 0 oder 1 anhängen. Das sind $2 \cdot f(n-1)$ Möglichkeiten. Es verbleiben noch die Worte der Länge $n$ die auf 02 und 12 enden: Dies sind $2 \cdot f(n-2)$ Möglichkeiten.

e) **Induktionsanfang:** $n = 2$: $f(2) = 8 \geq 2^{2+1}$

   $n = 3$: $f(3) = 22 \geq 2^{3+1} = 16$

   **Induktionsannahme:** Für ein beliebiges, aber festes $n \geq 2$ gilt:

   $f(n-1) \geq 2^{n-1+1}$ und $f(n) \geq 2^{n+1}$

   alternativ auch z.B. Für ein beliebiges, aber festes $k \geq 2$ gilt:

   $\forall 2 \leq n \leq k : f(n) \geq 2^{n+1}$

   **Induktionsschluss:**

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2 \cdot f(n) + 2 \cdot f(n-1) \\ &\geq 2 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot (2^{n-1+1}) \\ &= 2^{n+1+1} + 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2^{n+1+1} \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** (7 Punkte)

Gegeben sei folgende kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, S, P\})$ mit

$$\begin{aligned} P = \{S &\to AB, \\ A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{ab}, \\ B &\to \mathtt{b}B\mathtt{c} \mid \mathtt{bc}\}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie alle Wörter der Länge 6 an, die in $L(G)$ liegen. [*2 Punkte*]

b) Modifizieren Sie $G$ zur kontextfreien Grammatik $G'$, so dass gilt: $L(G') = L$, mit $L = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k\mathtt{d}^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}_+ \text{ und } (i + k = j + l)\}$.

[*4 Punkte*]

*Lösungsvorschlag:*

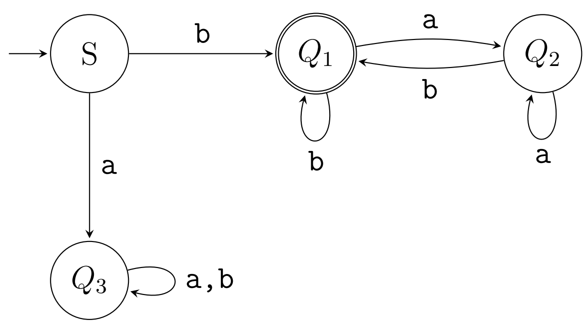
a) `aabbbc,abbbcc`

b) Grammatik $G = (\{A, B, C, S\}, \{\mathtt{a,b,c,d}\}, S, P)$ mit

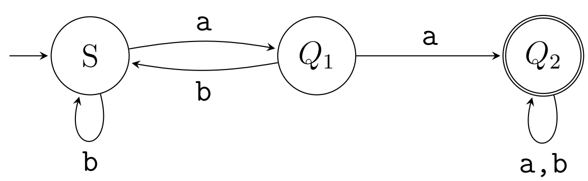
$$\begin{aligned} P = \{S &\to \mathtt{a}A\mathtt{b}B\mathtt{c}C\mathtt{d} \mid \mathtt{a}S\mathtt{d}, \\ A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \epsilon, \\ B &\to \mathtt{b}B\mathtt{c} \mid \epsilon, \\ C &\to \mathtt{c}C\mathtt{d} \mid \epsilon\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (10 Punkte)

Gegeben seien folgende zwei Akzeptoren $A_1$ und $A_2$




$A_1$:




$A_2$:

a) Geben Sie zwei reguläre Ausdrücke $R_1$ und $R_2$ an, so dass $\langle R_1 \rangle = L(A_1)$ und $\langle R_2 \rangle = L(A_2)$. *[2 Punkte]*

b) Geben Sie einen Akzeptor $B_1$ (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(B_1) = \{w \mid w \in L(A_1) \wedge w \notin L(A_2)\}$. *[3 Punkte]*

c) Geben Sie einen Akzeptor $B_2$ (wie in der Vorlesung definiert) an, so dass $L(B_2) = \{w \mid w \in L(A_2) \wedge w \notin L(A_1)\}$. *[5 Punkte]*

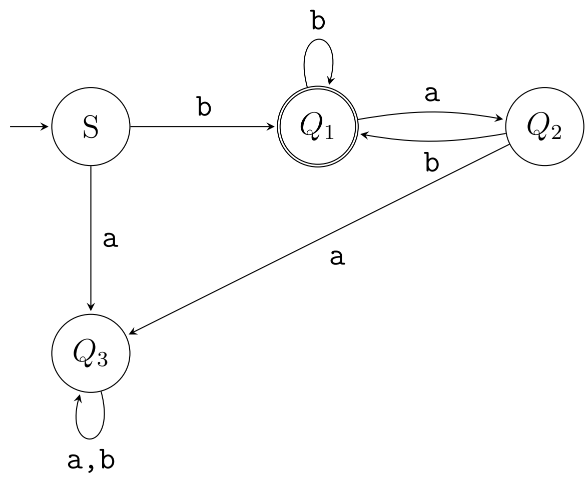
*Hinweis:* Benutzen Sie für Ihre Akzeptoren jeweils maximal 9 Zustände.

*Lösungsvorschlag:*

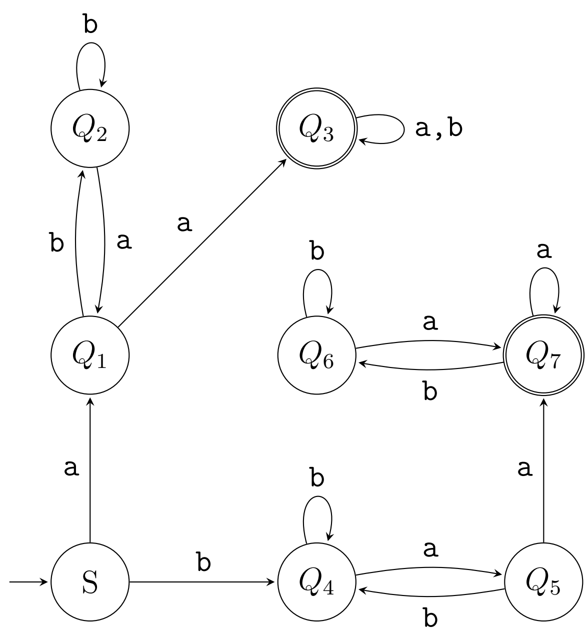
a) 1.) $(b(a|b) * b) \mid b$ oder auch $bb * (aa * bb*)*$

2.) $(a|b) * aa(a|b)*$ oder auch $b * a(bb * a) * a(a|b)*$

b) $B_1$:




c) $B_2$:



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

Für $0 \leq i < |w|$ bezeichne $w(i)$ das $(i+1)$-te Zeichen eines Wortes $w \in \{0,1\}^+$. $w(0)$ bezeichnet also z.B. das erste Zeichen, $w(1)$ das zweite, usw.

Gegeben ist das folgende Programmstück, das $f(w,a,b) = r$ für Eingaben $a, b \in \mathbb{N}_0$ berechnet und $r$ ausgibt.

```
f(w, a, b){
if (a = b) then
    r ← w(a)
else
    c ← (a + b) div 2
    d ← f(w, a, c)
    e ← f(w, c + 1, b)
    r ← d + e − 2 ∗ d ∗ e
fi
return r
}
```

Machen Sie eine Beispielrechnung für $f(1011,0,3)$. Geben Sie dabei die Werte der einzelnen Variablen an, wenn sich deren Wert ändert.

Sie können die folgenden Tabellen für die einzelnen Berechnungen von $f(w,a,b)$ benutzen.

*Lösungsvorschlag:*

| f(w,0,3) | **c** | **d** | **e** | **r** |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $f(w,0,1) = 1$ | $f(w,2,3) = 0$ | $1 - 2 \cdot 0 = 1$ |

| f(w,0,1) | **c** | **d** | **e** | **r** |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | $f(w,0,0) = 1$ | $f(w,1,1) = 0$ | $1 - 2 \cdot 0 = 1$ |

| f(w,2,3) | **c** | **d** | **e** | **r** |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | $f(w,2,2) = 1$ | $f(w,3,3) = 1$ | $2 - 2 \cdot 1 = 0$ |

**Aufgabe 7** (8 Punkte)

Sei $T$ die Turingmaschine, die als Eingabe ein Wort $w$ über $\{\mathtt{0}, X\}$ erhält und folgenden Homomorphismus $h$ berechnet

$h(\mathtt{0}) = \mathtt{0},\ h(X) = \epsilon$ ,

so dass nach der Abarbeitung (umgeben nur von Blanksymbolen) $h(w)$ auf dem Band steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn auf dem ersten Symbol von $w$ (sofern $w$ nicht das leere Wort ist).

a) Geben Sie $T$ explizit grafisch an. [*5 Punkte*]

b) Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes $w$ eine möglichst scharfe obere Schranke in O-Notation für die worst case Laufzeit von $T$ an.

[*1 Punkt*]

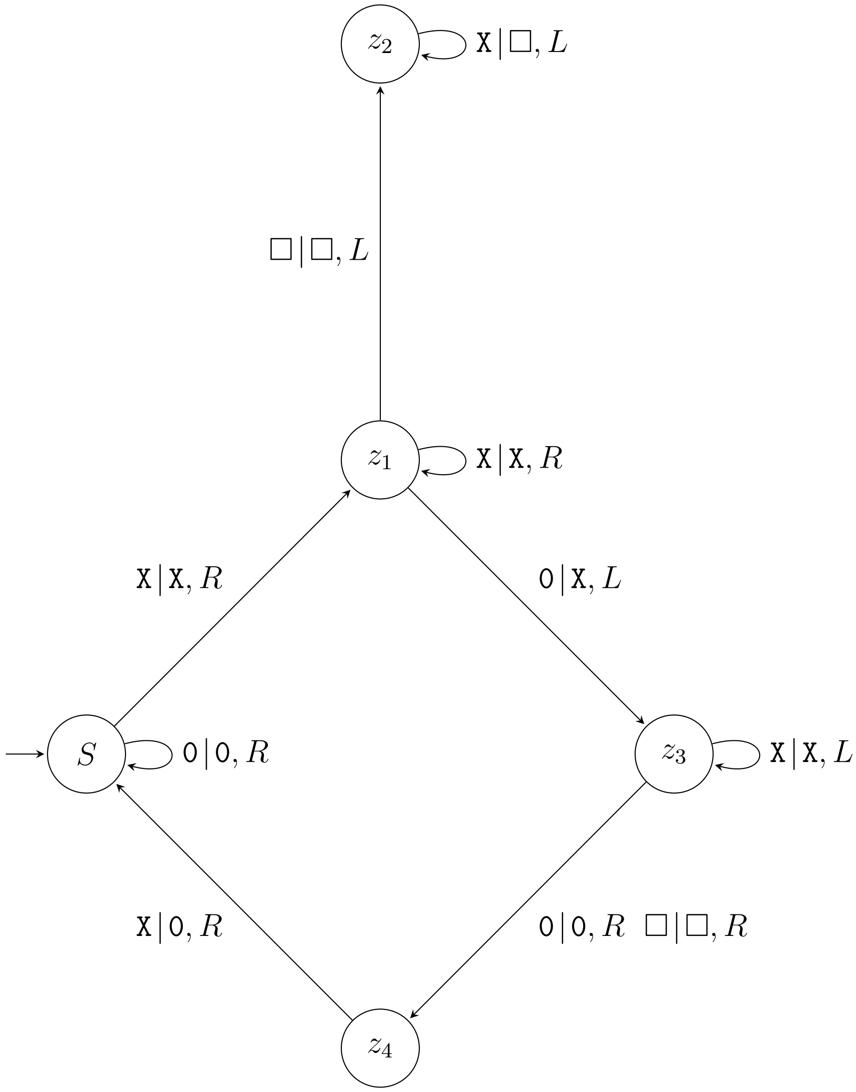
c) Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes $w$ eine Eingabe an, deren Bearbeitung (bis auf einen konstanten Faktor) worst case Laufzeit benötigt. [*1 Punkt*]

d) Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes $w$ eine Eingabe an, deren Bearbeitung asymptotisch nicht worst case Laufzeit benötigt.

[*1 Punkt*]

*Lösungsvorschlag*

a)




b) $O(n^2)$

c) $\texttt{X}^{\lceil n/2 \rceil}\texttt{0}^{\lceil n/2 \rceil}$

d) $\texttt{0}^n$