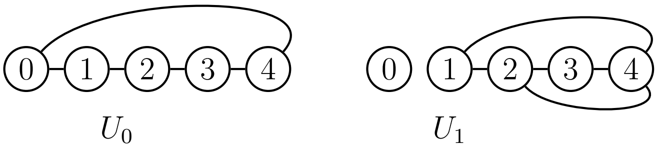
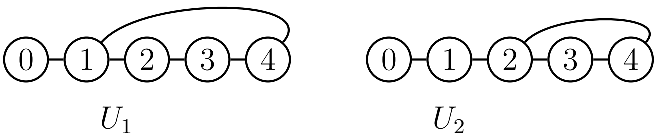
Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 (3+3 Punkte)

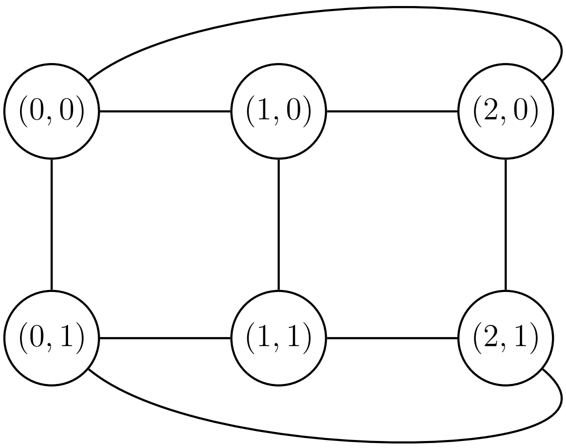
Lösung 7.1

a) 

b) 

Aufgabe 7.2 (4+1 Punkte)

Lösung 7.2

a) 

b) z.B. $((0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(1,1),(0,1),(0,0))$

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Lösung 7.3
Wenn man das beschriebene Problem als (ungerichteten) Graphen modelliert, dessen Knoten die 7 Volksstämme repräsentieren und eine Kante genau dann in der Kantenmenge liegt, wenn zwei Stämme aneinander grenzen, muss jeder Knoten genau 3 Kanten zu anderen Knoten besitzen. Das heisst, jeder Knoten hat den Knotengrad 3. Bei 7 Knoten ergibt sich damit folgendes: $\sum_{i \in V} d(i) = 7 \cdot 3 = 21$
Gleichzeitig gilt in jedem ungerichteten Graphen, dass die Summe der Knotengrade gerade sein muss (da sie der doppelten Anzahl an Kanten entspricht). Es kann folglich keinen Graphen geben, bei dem die Summe der Knotengrade 21 ist.

Aufgabe 7.4 (5 Punkte)

Lösung 7.4
Angenommen der Graph $U = (V, E)$ sei nicht zusammenhängend. Dann lässt er sich in $i \geq 2$ maximal zusammenhängende Teilgraphen U_i (die Zusammenhangskomponenten) aufteilen.
O.B.d.A sei $U_1 = (V_1, E_1)$ die Zusammenhangskomponente, die den Knoten mit dem höchsten Grad enthält. $U_2 = (V_2 = V \setminus V_1, E_2 = E \setminus E_1)$ sei der “übrige” Graph, also $U \setminus U_1$. Dann gilt:

$$|V| = |V_2| + |V_1| \ \wedge$$

$$\max(\{d(x) \mid x \in V\}) \leq |V_1| - 1 \ \wedge \ \min(\{d(x) \mid x \in V\}) \leq |V_2| - 1$$

, da maximal eine Kante zu allen anderen Knoten aus V_1bzw aus V_2 existieren kann.

Aus Addition der beiden Ungleichungen folgt: $\max(\{d(x) \mid x \in V\}) + \min(\{d(x) \mid x \in V\}) \leq |V_1| + |V_2| - 2 = |V| - 2$, was allerdings im Widerspruch zur ursprünglichen Behauptung $\max(\{d(x) \mid x \in V\}) + \min(\{d(y) \mid y \in V\}) \geq |V| - 1$ steht (bzw. gerade deren Negation entspricht).
Die Annahme war folglich falsch, so dass der Graph zusammenhängend sein muss.