Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 (2 Punkte)

Gegeben seien zwei Typkonvertierungsfunktionen aus Java: $f : \texttt{int} \to \texttt{double}$ und $g : \texttt{double} \to \texttt{int}$. Welche der beiden folgenden Aussagen ist wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\forall x \in \texttt{double} : (f \circ g)(x) = x$
- $\forall x \in \texttt{int} : (g \circ f)(x) = x$

Lösung 6.1

Die zweite Aussage ist wahr, da bei der Konvertierung von `int` nach `double` keine Information verloren geht.
Die erste Aussage stimmt dagegen nicht. So ist z.B. $(f \circ g)(4.2) \neq 4.2$, da $g(4.2) = 4$ und $f(4) \neq 4.2$.

Aufgabe 6.2 (2+3 Punkte)

Gegeben seien die beiden Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Zeigen Sie:

a) f und g sind injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist injektiv.

b) f ist nicht surjektiv und g ist injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist nicht surjektiv.

Lösung 6.2

a) f ist injektiv, d.h. $\forall x_0, x_1 \in X : x_0 \neq x_1 \Rightarrow f(x_0) \neq f(x_1)$ und es gilt zudem $f(x_0), f(x_1) \in Y$.

   Außerdem ist g injektiv, d.h. $\forall y_0, y_1 \in Y : y_0 \neq y_1 \Rightarrow g(y_0) \neq g(y_1)$. Da dies für alle Elemente aus Y gilt, gilt dies auch für für $f(x_0)$ und $f(x_1)$ $\Rightarrow$ $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) \neq g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1)$, für $x_0 \neq x_1$. Also ist $g \circ f$ auch injektiv.

b) Zu zeigen: $g \circ f$ ist nicht surjektiv, also: $\exists z \in Z : \forall x \in X : (g \circ f)(x) \neq z$

   f ist nicht surjektiv: $\exists y' \in Y : \forall x \in X : f(x) \neq y'$.

   Da g injektiv ist: $\forall y_0, y_1 \in Y : y_0 \neq y_1 \Rightarrow g(y_0) \neq g(y_1)$

   Sei $z = g(y')$ und x ein beliebiges Element aus X : $f(x) \overset{f \text{ nicht surjektiv}}{\neq} y' \Rightarrow g(f(x)) \neq z$

   $g \circ f$ ist also nicht surjektiv.

Aufgabe 6.3 (1+2+4 Punkte)
Gegeben sei folgender Homomorphismus
$h : \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \to \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ mit $h(\mathtt{0}) = \mathtt{01}, h(\mathtt{1}) = \mathtt{0}$

a) Geben Sie der Reihe nach alle $h^i(0)$ für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an.

b) Geben Sie eine rekursive Beschreibung der Folge $x_n = h^n(0),\ n \in \mathbb{N}_+$ an, ohne sich auf obige Definition als Homomorphismus zu beziehen.

c) Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teilaufgabe b) durch vollständige Induktion.

Lösung 6.3

a) $h(\mathtt{0}) = \mathtt{01}, h^2(\mathtt{0}) = \mathtt{010}, h^3(\mathtt{0}) = \mathtt{01001}, h^4(\mathtt{0}) = \mathtt{01001010}, h^5(\mathtt{0}) = \mathtt{0100101001001}$

b) $x_1 = \mathtt{01}, x_2 = \mathtt{010},\ \forall n \geq 3 : x_n = x_{n-1}x_{n-2}$

c) **Induktionsanfang:** $h^1(\mathtt{0}) = \mathtt{01}, h^2(\mathtt{0}) = \mathtt{010}, h^3(\mathtt{0}) = \mathtt{01001} = h^2(0) \cdot h^1(0)$ ✓

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:
$x_n = x_{n-1}x_{n-2}$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $x_{n+1} = x_n x_{n-1}$

$$x_{n+1} \overset{Def.}{=} h(x_n) \overset{IV}{=} h(x_{n-1}x_{n-2}) \overset{Homomorphismus}{=} h(x_{n-1})h(x_{n-2}) \overset{Def.}{=} x_n x_{n-1}$$

Hinweis: Für den IA gibt es 1.5 Punkte, IV 1 Punkt und IS 1.5 Punkte

Aufgabe 6.4 (2 Punkte)
Geben Sie einen surjektiven Homomorphismus h an, der
$L_1 = \{\mathtt{b}^i\mathtt{a}^n\mathtt{b}^j\mathtt{c}^n\mathtt{b}^k \mid i \in \mathbb{N}_+,\ j, k, n \in \mathbb{N}_0\}$ auf $L_2 = \{\mathtt{ccc}\}^*$ abbildet.

Lösung 6.4
$h(\mathtt{c}) = \mathtt{ccc},\ h(\mathtt{a}) = h(\mathtt{b}) = \varepsilon$

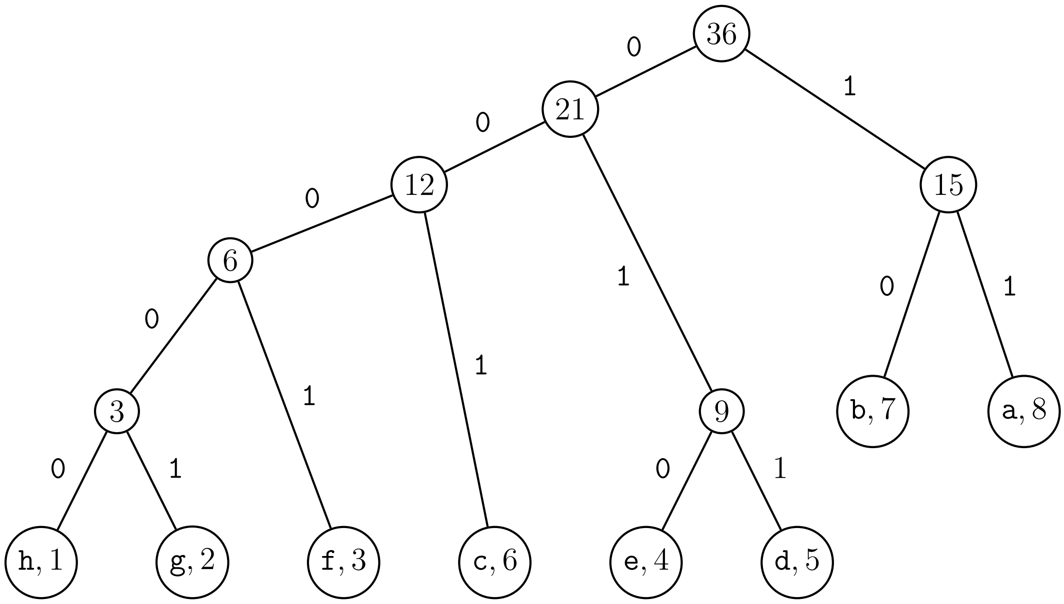
Aufgabe 6.5 (4+1 Punkte)
Für eine Zeichenmenge $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{h}\}$ seien folgende absolute Häufigkeiten P gegeben:

Zeichen	a	b	c	d	e	f	g	h
P	8	7	6	5	4	3	2	1

a) Konstruieren Sie den für den Huffman-Code benötigten Baum.

b) Geben Sie die Codierung von `fade` mit dem zu dem Baum gehörenden Huffman-Code an.

Lösung 6.5



Hinweis: Für jeden falsch zusammengefassten Knoten gibt es einen Punkt Abzug.

b) `000111011010`