Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (1+1+2+2 Punkte)

Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, die folgende Sprachen über dem Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ produziert:

a) $L_< = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j | 0 \leq i < j\}$

b) $L_> = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j | i > j \geq 0\}$

c) $L_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\mathtt{ba}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$

d) $L_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \smallsetminus \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n | n \in \mathbb{N}_0\}$

Lösung 5.1

a) $G_a = (\{S_<\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S_<, P_<)$, mit $P_< = \{S_< \rightarrow S_<\mathtt{b} \mid \mathtt{a}S_<\mathtt{b} \mid \mathtt{b}\ \}$

b) $G_b = (\{S_>\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S_>, P_>)$, mit $P_> = \{S_> \rightarrow \mathtt{a}S_> \mid \mathtt{a}S_>\mathtt{b} \mid \mathtt{a}\ \}$

c) $G_c = (\{S_1, A\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S_1, P_1)$, mit

$$\begin{aligned} P_1 = \{ \quad S_1 &\rightarrow \mathtt{a}S_1 \mid \mathtt{b}S_1 \mid \mathtt{ba}A \ , \\ A &\rightarrow \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}A \mid \varepsilon \ \}. \end{aligned}$$

d) $G_d = (\{S_<, S_>, S_1, A, S_2\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S_2, P_2)$, mit

$$\begin{aligned} P_2 = \{ \quad S_2 &\rightarrow S_< \mid S_> \mid S_1 \ , \\ S_< &\rightarrow S_<\mathtt{b} \mid \mathtt{a}S_<\mathtt{b} \mid \mathtt{b} \ , \\ S_> &\rightarrow \mathtt{a}S_> \mid \mathtt{a}S_>\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \ , \\ S_1 &\rightarrow \mathtt{a}S_1 \mid \mathtt{b}S_1 \mid \mathtt{ba}A \ , \\ A &\rightarrow \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}A \mid \varepsilon \ \}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 (2+2+2 Punkte)

Gegeben sind zwei kontextfreie Grammatiken $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ und $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$, wobei gilt: $N_1 \cap N_2 = \{\}$. Finden Sie kontextfreie Grammatiken für die gilt:

a) $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

b) $L(G) = L(G_1)^*$

c) $L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$

Lösung 5.2

a) Wir führen ein neues Startsymbol S ein (wobei gilt, dass $S \notin N_1 \cup N_2$) und die beiden Produktionen $S \to S_1$ und $S \to S_2$. Also: $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\})$

b) $G = (N_1, T_1, S_1, P_1 \cup \{S_1 \to S_1S_1, S_1 \to \epsilon\})$

c) Wir führen ein neues Startsymbol S ein (wobei gilt, dass $S \notin N_1 \cup N_2$) und die Produktion $S \to S_1S_2$. Also: $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1S_2\})$

Aufgabe 5.3 (2+2 Punkte)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$ mit der Produktionenmenge

$$P = \{ \begin{array}{ll} S & \to \mathtt{b}AA \ , \\ A & \to \mathtt{a}B \mid B\mathtt{a} \mid \mathtt{b} \ , \\ B & \to \mathtt{a}A \mid \mathtt{a} \ \}. \end{array}$$

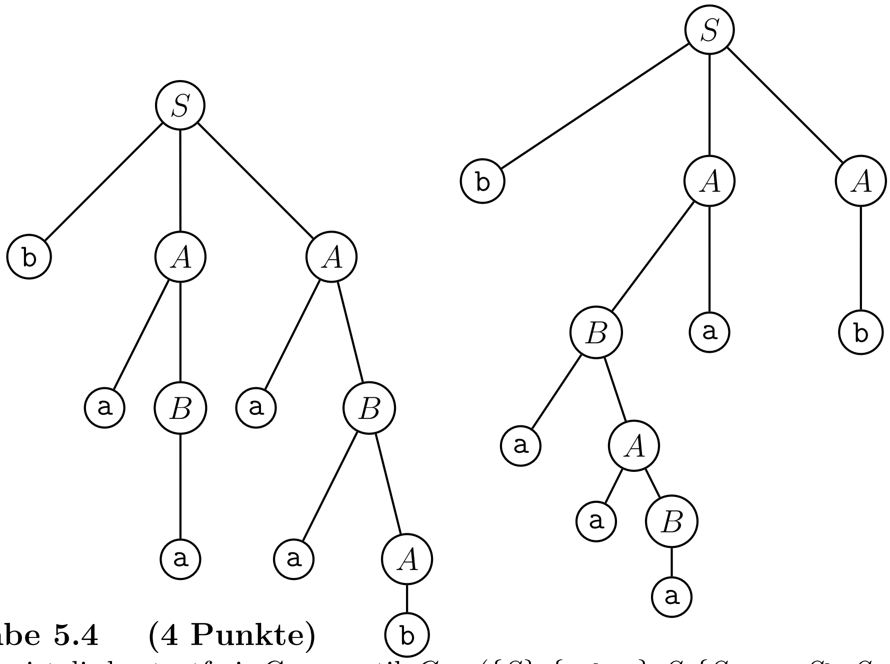
a) Geben Sie alle Wörter $w \in L(G)$ der Länge 5 an.

b) Geben Sie zwei verschiedene Ableitungsbäume für `baaaab` an.

Lösung 5.3

a) `baabb`, `baaaa`, `babab`, `bbaba`, `bbaab`

Hinweis: Für jedes falsche/fehlende Wort gibt es -0.5 Punkte b)



Aufgabe 5.4 (4 Punkte)
Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, S, \{S \to \mathtt{aa}S\mathtt{b}, S \to \mathtt{aa}S\mathtt{c}, S \to \varepsilon\})$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall w \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^n : S \Rightarrow^n \mathtt{a}^{2n} S w$$

Lösung 5.4

Induktionsanfang: $i = 0$: $\{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^0$ enthält nur ε
$S \Rightarrow^0 \mathtt{a}^0 S \varepsilon \surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$\forall w \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^i : S \Rightarrow^i \mathtt{a}^{2i} S w$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $S \Rightarrow^{i+1} \mathtt{a}^{2(i+1)} S w'$
$w' \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^{i+1}$ Also $w' = xw$, mit $x \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}$

Wir unterscheiden also 2 Fälle:

1.) $x = \mathtt{b}$: $S \overset{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow^i} \mathtt{a}^{2i} S w \Rightarrow \mathtt{a}^{2i}\mathtt{aa}S\mathtt{b}w = \mathtt{a}^{2i+2} S w'$, also $S \Rightarrow^{i+1} \mathtt{a}^{2(i+1)} S w'$, wobei $w' = \mathtt{b}w$.

2.) $x = \mathtt{c}$: $S \overset{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow^i} \mathtt{a}^{2i} S w \Rightarrow \mathtt{a}^{2i}\mathtt{aa}S\mathtt{c}w = \mathtt{a}^{2i+2} S w'$, also $S \Rightarrow^{i+1} \mathtt{a}^{2(i+1)} S w'$, wobei $w' = \mathtt{c}w$.

Hinweis: 1 Punkt für IA, 1 Punkt für IV, 2 Punkte für IS