Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 10.1 (2+2 Punkte)
Die nachfolgend definierte Funktion $f(a,b,n)$ legt für beliebige aber feste Zahlen $a,b \in \mathbb{N}_+$ eine Zahlenfolge $f(a,b,1), f(a,b,2), f(a,b,3)$, usw. fest:

$$f(a,b,n) = \begin{cases} a, & \text{wenn } n = 1 \\ f(a,b,n-1) + (n-1)\cdot b, & \text{wenn } n > 1 \wedge n \text{ gerade }, \\ f(a,b,n-1) - (n-1)\cdot b, & \text{wenn } n > 1 \wedge n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

a) Geben Sie die ersten 7 Werte der Zahlenfolge an.

b) Geben Sie eine allgemeine Formel für den n-ten Wert der Zahlenfolge an.

Lösung 10.1

a) $f(a,b,1) = a, f(a,b,2) = a+b, f(a,b,3) = a-b, f(a,b,4) = a+2b, f(a,b,5) = a-2b, f(a,b,6) = a+3b, f(a,b,7) = a-3b$

b) $f(a,b,n) = a + (-1)^n \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot b$

Aufgabe 10.2 (2 Punkte)
Die Laufzeit von Algorithmus A wird beschrieben durch $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Ein alternativer Algorithmus A' besitzt die Laufzeit $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$, mit $a \in \mathbb{N}_+$.
Welchen Wert kann a maximal annehmen, so dass A' asymptotisch schneller als A ist? Begründen Sie kurz.

Lösung 10.2
a kann maximal den Wert 48 annehmen.
Nach Master-Theorem liegt die Laufzeit von A in $\Theta(n^{\log_2 7})$.
Damit A' asymptotisch schneller als A ist, muss $\log_4 a < \log_2 7 = \log_4 49$ gelten.

Aufgabe 10.3 (3 Punkte)
Wir nennen ein Teilwort v eines Wortes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ einen MMESS-Faktor, wenn

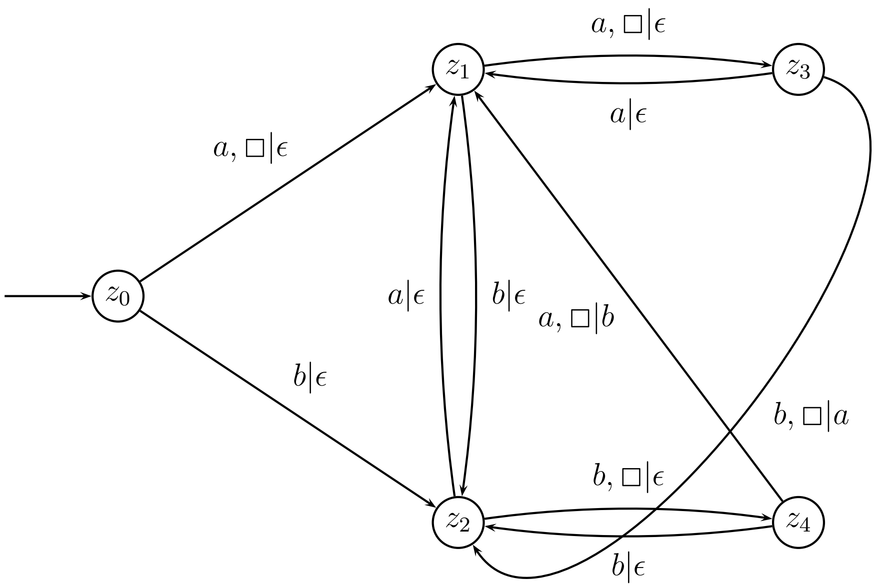
- $v \in \{\mathtt{a}\}^+$ oder $v \in \{\mathtt{b}\}^+$ und
- v ein maximal langes solches Teilwort ist, also links und rechts unmittelbar neben v nicht noch einmal das gleiche Symbol steht wie in v.

Geben Sie einen Mealy-Automaten mit Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \square\}$ und Ausgabealphabet $Y = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und möglichst wenig Zuständen an, der jede Eingabe $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \cdot \square$ wie folgt verarbeitet:

- Jeder MMESS-Faktor ungerader Länge wird gelöscht.
- Jeder MMESS-Faktor gerader Länge wird durch ein einzelnes Symbol ersetzt, nämlich das, das in dem MMESS-Faktor vorkommt.

Zum Beispiel soll bei Eingabe `aaabbabaaaa`$\square$ die Ausgabe `ba` sein.

Lösung 10.3



Aufgabe 10.4 (2+2+2 Punkte)
Geben Sie (wenn möglich) mit Hilfe des Master-Theorems einen Ausdruck für die Laufzeit von $T(n)$ an. Falls das Mastertheorem nicht anwendbar ist, begründen Sie, warum das nicht möglich ist. In diesem Fall brauchen Sie keine Abschätzung anzugeben.

a) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

b) $T(n) = 3T(n/2) + n \log n$

c) $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

Lösung 10.4

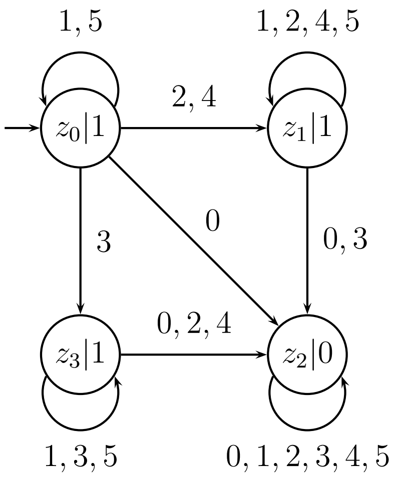
a) $T(n) \in \Theta(\sqrt{n}\log n)$, nach Fall 2 des Master-Theorems: $\sqrt{n} \in \Theta(n^{\log_4 2})$.

b) $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$, nach Fall 1 des Master-Theorems: $n \log n \in O(n^{\log_2 3})$

c) $T(n) \in \Theta(n^2\sqrt{n})$, nach Fall 3 des Master-Theorems: $n^2\sqrt{n} \in \Omega(n^{\log_2 4})$

Aufgabe 10.5 (3 Punkte)
Im Land der Dezimalen werden alle Nachrichten im Dezimalsystem übermittelt. Die aktuelle Königin Hexa beansprucht jedoch die Ziffer 6 für den eigenen persönlichen Gebrauch, so dass Nachrichten, in denen das Produkt von Ziffern ein Vielfaches von 6 ist, verboten sind. Desweiteren sind auch alle Ziffern ≥ 6 verboten. Zeichnen Sie einen Moore-Automaten mit möglichst wenig Zuständen, der 1 ausgibt, wenn die Nachricht $w \in X^*$ erlaubt ist, ansonsten eine 0 ausgibt. Es gelte dabei: Eingabealphabet $X = \mathbb{G}_6$ und Ausgabealphabet $Y = \{\mathtt{1}, \mathtt{0}\}$.
Hinweis: 0 ist Vielfaches von 6

Lösung 10.5



Aufgabe 10.6 (2+2 Punkte)
Ein roter Käfer krabbelt zum Zeitpunkt 0 am Ende eines 1 Meter langen elastischen Bandes los in Richtung anderes Ende. Er hat konstante Geschwindigkeit $1\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$.

Immer nach einer Minute wird das Band um 1 Meter gedehnt, der Käfer behält dabei seine relative Position auf dem Band und krabbelt weiter.
Das Dehnen des Bandes geschieht ohne Zeitverbrauch, der Käfer ist unsterblich und das Band lässt sich unbeschränkt dehnen.

a) Geben Sie die absolute Position x_a (das ist die Entfernung des Käfers zum Startpunkt) und relative Position $x_r = \frac{x_a}{\text{Bandlänge}}$ des Käfers nach der ersten, zweiten und dritten Dehniteration an.

b) Wird der Käfer jemals das Ende erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Lösung 10.6

a)
- nach erster Iteration: $x_a = 2\text{cm}$, $x_r = 2/200$
- nach zweiter Iteration: $x_a = 4,5\text{cm}$, $x_r = 4,5/300$
- nach dritter Iteration: $x_a = \frac{22}{3}\text{cm}$, $x_r = 11/600$

b) Ja, er wird das Ende erreichen.

Nach der n-ten Dehnung ist das Band $n+1$ Meter lang. Der Dehnungsfaktor beträgt also $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

Bzgl relativer Position verhält sich die Dehnung wie die harmonische Reihe: $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Es gilt also zu betrachten, wann die harmonische Reihe den Wert 100 - also der Käfer das Ende des Bandes - erreicht , was bei ca $2,688 \cdot 10^{43}$ der Fall ist.

Der rote Käfer braucht also ca $5,1144 \cdot 10^{37}$ Jahre um das Ende zu erreichen.

Hinweis: Die Zeitdauer war in der Lösung nicht verlangt.

Aufgabe 10.7 (1 Punkte)
Welchen asymptotischen Aufwand (möglichst präzise Abschätzung in O-Notation) hat der aktuell schnellste Algorithmus der Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen?

Lösung 10.7
Der aktuelle schnellste Algorithmus liegt in $O(n^{2.3727})$