Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 22. Dezember 2011

Abgabe: 13. Januar 2012, 12:30 Uhr
im Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10:	/ 23
Blätter 1 – 10:	/ 200

Aufgabe 10.1 (2+2 Punkte)
Die nachfolgend definierte Funktion $f(a, b, n)$ legt für beliebige aber feste Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_+$ eine Zahlenfolge $f(a, b, 1), f(a, b, 2), f(a, b, 3)$, usw. fest:

$$f(a,b,n) = \begin{cases} a, & \text{wenn } n = 1 \\ f(a,b,n-1) + (n-1) \cdot b, & \text{wenn } n > 1 \land n \text{ gerade ,} \\ f(a,b,n-1) - (n-1) \cdot b, & \text{wenn } n > 1 \land n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

a) Geben Sie die ersten 7 Werte der Zahlenfolge an.

b) Geben Sie eine allgemeine Formel für den n-ten Wert der Zahlenfolge an.

Aufgabe 10.2 (2 Punkte)
Die Laufzeit von Algorithmus A wird beschrieben durch $T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Ein alternativer Algorithmus A' besitzt die Laufzeit $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$, mit $a \in \mathbb{N}_+$.
Welchen Wert kann a maximal annehmen, so dass A' asymptotisch schneller als A ist?

Aufgabe 10.3 (3 Punkte)
Wir nennen ein Teilwort v eines Wortes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ einen MMESS-Faktor, wenn

- $v \in \{\mathtt{a}\}^+$ oder $v \in \{\mathtt{b}\}^+$ und
- v ein maximal langes solches Teilwort ist, also links und rechts unmittelbar neben v nicht noch einmal das gleiche Symbol steht wie in v.

Geben Sie einen Mealy-Automaten mit Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \square\}$ und Ausgabealphabet $Y = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und möglichst wenig Zuständen an, der jede Eingabe $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \cdot \square$ wie folgt verarbeitet:

- Jeder MMESS-Faktor ungerader Länge wird gelöscht.
- Jeder MMESS-Faktor gerader Länge wird durch ein einzelnes Symbol ersetzt, nämlich das, das in dem MMESS-Faktor vorkommt.

Zum Beispiel soll bei Eingabe `aaabbabaaaa`□ die Ausgabe `ba` sein.

Aufgabe 10.4 (2+2+2 Punkte)
Geben Sie (wenn möglich) mit Hilfe des Master-Theorems einen Ausdruck für die Laufzeit von $T(n)$ an. Falls das Mastertheorem nicht anwendbar ist, begründen Sie, warum das nicht möglich ist. In diesem Fall brauchen Sie keine Abschätzung anzugeben.

a) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

b) $T(n) = 3T(n/2) + n \log n$

c) $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

Aufgabe 10.5 (3 Punkte)
Im Land der Dezimalen werden alle Nachrichten im Dezimalsystem übermittelt. Die aktuelle Königin Hexa beansprucht jedoch die Ziffer 6 für den eigenen persönlichen Gebrauch, so dass Nachrichten, in denen das Produkt von Ziffern ein Vielfaches von 6 ist, verboten sind. Desweiteren sind auch alle Ziffern ≥ 6 verboten.
Zeichnen Sie einen Moore-Automaten mit möglichst wenig Zuständen, der 1 ausgibt, wenn die Nachricht $w \in X^*$ erlaubt ist, ansonsten eine 0 ausgibt. Es gelte dabei: Eingabealphabet $X = \mathbb{G}_6$ und Ausgabealphabet $Y = \{\mathtt{1}, \mathtt{0}\}$.
Hinweis: 0 ist Vielfaches von 6.

Aufgabe 10.6 (2+2 Punkte)
Ein roter Käfer krabbelt zum Zeitpunkt 0 am Ende eines 1 Meter langen elastischen Bandes los in Richtung anderes Ende. Er hat konstante Geschwindigkeit $1\frac{\text{cm}}{\text{min}}$. Immer nach einer Minute wird das Band um 1 Meter gedehnt, der Käfer behält dabei seine relative Position auf dem Band und krabbelt weiter.
Das Dehnen des Bandes geschieht ohne Zeitverbrauch, der Käfer ist unsterblich und das Band lässt sich unbeschränkt dehnen.

a) Geben Sie die absolute Position x_a (das ist die Entfernung des Käfers zum Startpunkt) und relative Position $x_r = \frac{x_a}{\text{Bandlänge}}$ des Käfers nach der ersten, zweiten und dritten Dehniteration an.

b) Wird der Käfer jemals das Ende erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe 10.7 (1 Punkte)
Welchen asymptotischen Aufwand (möglichst präzise Abschätzung in O-Notation) hat der aktuell schnellste Algorithmus der Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen?