Lösungsvorschläge zur Klausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik 1. September 2011

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	5	5	6	7	5	6	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (1,5+1+1+1,5 = 5 Punkte)

1. Gegeben sei die formale Sprache $L_1 = \left(\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \cdot \{\mathtt{c}\}\right)^*$. Geben Sie alle Wörter der Länge 2 in L_1 an.

   Lösung: $\{\mathtt{ac}, \mathtt{bc}, \mathtt{cc}\}$

2. Geben Sie eine Menge L_2 von Wörtern an, so dass gilt:

   $$L_2 \cdot L_2 = \{\mathtt{aa}, \mathtt{aba}, \mathtt{aab}, \mathtt{abab}\}$$

   Lösung: $L_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{ab}\}$

3. Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G_3 = (\{S, X, Y, Z\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}, S, P)$ mit folgender Produktionenmenge

   $$\begin{aligned} P = \{ \quad & S \to \mathtt{a}S \mid S\mathtt{b} \mid \varepsilon \mid X, \\ & X \to \mathtt{d}Z \mid Y\mathtt{e} \mid \mathtt{f}Y, \\ & Y \to \varepsilon, \\ & Z \to \mathtt{d}X \\ \} & \end{aligned}$$

   Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der genau $L(G_3)$ beschreibt.

   Lösungsvorschlag: `a*(dd)*(e|f)b* | a*b*`

4. Es seien $R, S, T \subseteq M \times M$ binäre Relationen auf einer Menge M. Beweisen oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels):

   $$R \circ S \cap R \circ T \subseteq R \circ (S \cap T)$$

   Lösungsvorschlag: Die angegebene Teilmengenbeziehung lässt sich zum Beispiel widerlegen, wenn der Schnitt $S \cap T$ leer ist, $R \circ S \cap R \circ T$ aber nicht.

   Gegenbeispiel: $M = \{1, 2, 3\}$

   $R = \{(1,3); (2,3)\}$, $S = \{(1,1)\}$, $T = \{(1,2)\}$

   $R \circ S \cap R \circ T = \{(1,3)\} \cap \{(1,3)\} \neq \emptyset$

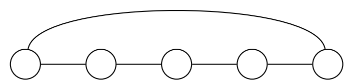
Aufgabe 2 (3+1+1=5 Punkte)

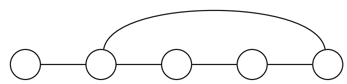
In dieser Aufgabe geht es um ungerichtete Graphen ohne Schlingen.

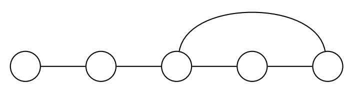
1. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 5 Knoten und genau 5 Kanten, die einen Weg besitzen, in dem alle Knoten vorkommen.

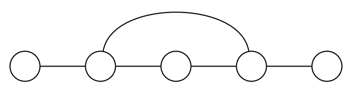
   Suchen Sie sich einen Ihrer Graphen aus und geben Sie für ihn die Wegematrix an.

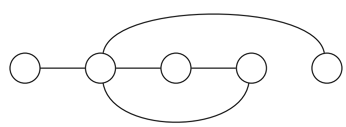
   Lösungsvorschlag:

   G_1 : 

   G_2 : 

   G_3 : 

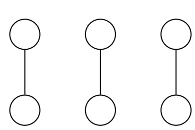
   G_4 : 

   G_5 : 

   $$\text{Wegematrix } W : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zeichnen Sie alle paarweise nichtisomorphen ungerichteten schlingenfreien Graphen mit genau 6 Knoten, die alle Grad 1 haben.

   Lösungsvorschlag:

3. Wieviele ungerichtete schlingenfreie Graphen mit Knotenmenge $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es, bei denen alle Knoten Grad 1 haben?

   Lösung: 15

Erklärung: (in der Klausur nicht erforderlich) Da jeder Knoten Grad 1 besitzt, führt zu jedem Knoten genau eine Kante. Bei der gegebenen festen Knotenmenge stehen für die Kante von Knoten 0 aus 5 Möglichkeiten zur Auswahl. Für die Kante vom kleinsten dann noch nicht verbundenen Knoten verbleiben 3 Möglichkeiten und für die letzte Kante bleibt nur eine Möglichkeit übrig.

Insgesamt gibt es also $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ solcher Graphen.

Achtung: Bei den ersten beiden Teilaufgaben gibt es bei Angabe mehrerer isomorpher Graphen Punktabzug. (Aber man kann auf keine Teilaufgabe weniger als 0 Punkte bekommen.)

Aufgabe 3 (1+1+4=6 Punkte)

Eine Funktion $T(n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei rekursiv wie folgt definiert:

- $T(0) = 2$
- $T(1) = 3$
- Für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1\}$ sei:

$$T(n) = 3 \cdot T(n-1) - 2 \cdot T(n-2)$$

1. Geben Sie die Funktionswerte $T(n)$ für $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ an.

   Lösung:

   $$T(2) = 5, T(3) = 9, T(4) = 17, T(5) = 33, T(6) = 65$$

2. Geben Sie eine geschlossene Formel $F(n)$ (d. h. einen arithmetischen Ausdruck) für $T(n)$ an.

   Lösung:

   $$F(n) = 2^n + 1$$

3. Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $F(n) = T(n)$.

   Lösungsvorschlag:

   Induktionsanfang: $n = 0$: $F(0) = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2 = T(0)$
   $n = 1$: $F(1) = 2^1 + 1 = 3 = T(1)$

   Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
   $T(n+1) = F(n+1) = 2^{n+1} + 1$ und $T(n) = F(n) = 2^n + 1$

   Induktionsschluss: zu zeigen: $F(n+2) = T(n+2)$

$$\begin{aligned}
T(n+2) &= 3 \cdot T(n+1) - 2 \cdot T(n) \\
&= 3 \cdot F(n+1) - 2 \cdot F(n) \\
&= 3 \cdot (2^{n+1} + 1) - 2 \cdot (2^n + 1) \\
&= 3 \cdot 2^{n+1} + 3 - 2 \cdot 2^n - 2 \\
&= 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n + 1 \\
&= 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} + 1 \\
&= 2^{n+2} + 1 = F(n+2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4+1+2=7 Punkte)

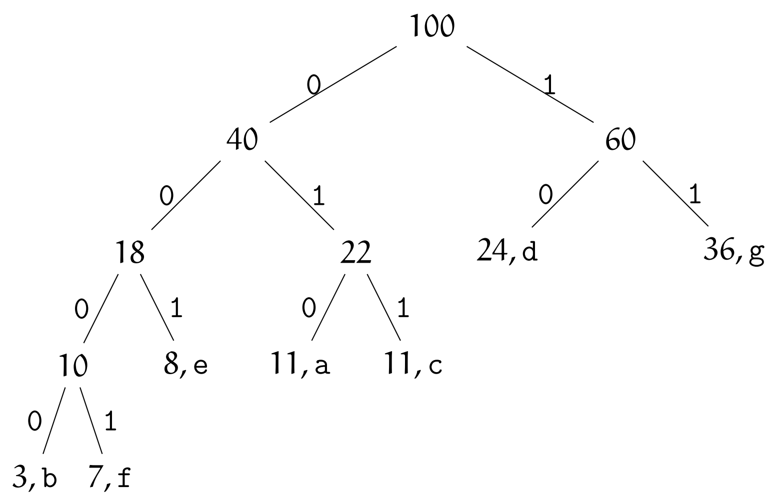
In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

1. Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	3	11	24	8	7	36

   (a) Zeichnen Sie den Huffman-Baum.

   Lösungsvorschlag:



   (b) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes bad an.

   Lösung:

$$h(\mathtt{bad}) = 0000\ 010\ 10$$

2. Für $k \geq 1$ sei ein Alphabet $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ mit $k+1$ Symbolen gegeben und ein Text, in dem jedes Symbol a_i mit Häufigkeit 2^i vorkommt für $0 \leq i \leq k$.

   Geben Sie die Huffman-Codierungen aller Symbole a_i an.

   Lösungsvorschlag:

$$h(a_i) = \begin{cases} 0^k & \text{falls } i = 0 \\ 0^{k-i}1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 5 (1+2+2=5 Punkte)

Es sei A ein nichtleeres Alphabet.

Für $x \in A$ und $w \in A^*$ sei $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x im Wort w.

Wir definieren auf A^* eine binäre Relation $\sqsubseteq$ wie folgt:

$$w_1 \sqsubseteq w_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \forall x \in A : N_x(w_1) \leq N_x(w_2)$$

1. Besitzt die Relation $\sqsubseteq$ ein kleinstes Element?
   Wenn ja: Geben Sie das kleinste Element an.
   Wenn nein: Beweisen Sie, dass es keines gibt.

   Lösungsvorschlag:

   Ja, es gibt ein kleinstes Element: ε

2. Besitzt die Relation $\sqsubseteq$ ein größtes Element?
   Wenn ja: Geben Sie das größte Element an.
   Wenn nein: Beweisen Sie, dass es keines gibt.

   Lösungsvorschlag:

   Nein, es gibt kein größtes Element.

   Angenommen w ist das größte Element. Dann lässt sich $v = x \cdot w$ bilden, wobei $x \in A$ irgendein Symbol ist. Dann ist natürlich $w \neq v$ aber $w \sqsubseteq v$. Also kann w kein größtes Element sein.

3. Zeigen Sie, dass die Relation $\sqsubseteq$ nicht antisymmetrisch ist, wenn A mindestens zwei Symbole enthält.

   Lösungsvorschlag:

   Sei $A = \{a, b\}$

   $w_1 = ab, w_2 = ba$

   Dann ist $w_1 \sqsubseteq w_2 \wedge w_2 \sqsubseteq w_1$. Jedoch ist $w_1 \neq w_2$, also die Relation $\sqsubseteq$ auch nicht antisymmetrisch.

Aufgabe 6 (1+3+2=6 Punkte)

Die Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ sei definiert als die Menge aller Wörter w, die die Binärzahldarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl sind.

1. Geben Sie alle Wörter aus L an, deren Länge höchstens 3 ist.

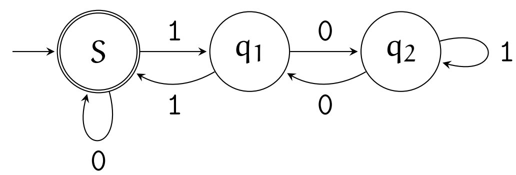
   Lösung:

   $$\varepsilon, 0, 00, 11, 000, 011, 110$$

   Anmerkung: Nach unserer Definition ist $\mathrm{Num}_2(\varepsilon) = 0$. Das Fehlen von ε gibt jedoch keinen Punktabzug.

2. Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L erkennt.

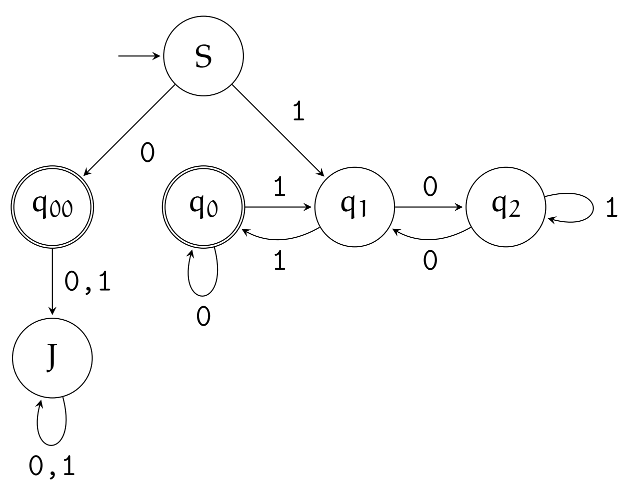
   Lösungsvorschlag:



3. Es sei L' die Menge aller Wörter aus L (!), die Länge 1 haben oder mit dem Symbol 1 beginnen.

   Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L' erkennt.

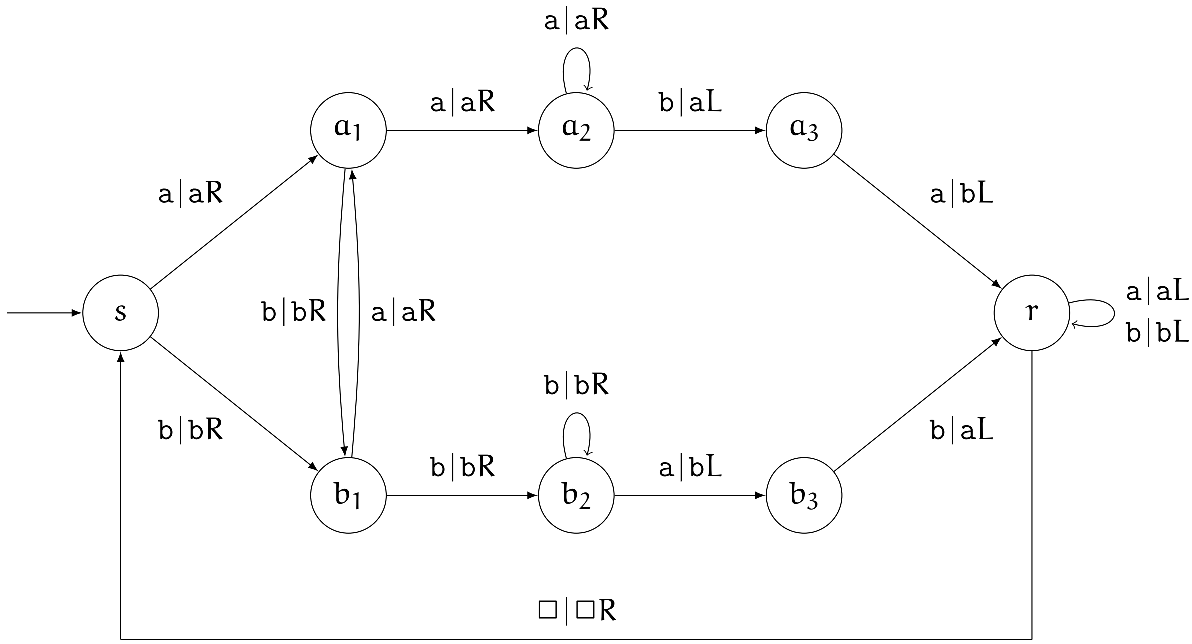
   Lösungsvorschlag:



Hinweis: Es muss sich um vollständige deterministische endliche Akzeptoren handeln wie sie in der Vorlesung definiert wurden.

Aufgabe 7 (3+2+1+1+1=8 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{s, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, r\}$.
- Anfangszustand ist s.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist durch folgendes Diagramm festgelegt:



Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen zu Beginn der Berechnung auf dem Band ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ steht, das von Blanksymbolen umgeben ist.

Der Kopf der Turingmaschine stehe anfangs auf dem ersten Symbol des Eingabewortes.

1. Geben Sie für die Eingabe aaabbb folgende Konfigurationen an:
   - die Anfangskonfiguration;
   - die Endkonfiguration;
   - jede Konfiguration, die in einem Zeitschritt vorliegt, nachdem die Turingmaschine vom Zustand r in den Zustand s gewechselt hat.

   Lösung:

   Anfangskonfiguration: (s)aaabbb

   Zwischenkonfigurationen:

   (s)aababb
   (s)abaabb

$(s)\mathtt{ababab}$
Endkonfiguration: $\mathtt{ababab}(b_1)$

2. Zu Beginn stehe auf dem Band ein Wort der Form $\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m$ mit $k \geq 1$ und $m \geq 0$. Welches Wort steht am Ende (wenn die Turingmaschine gehalten hat) auf dem Band, wenn

   (a) $k \leq m$ ist?
   Lösung:

   $$(\mathtt{ab})^k \cdot \mathtt{b}^{m-k}$$

   (b) $k > m$ ist?
   Lösung:

   $$(\mathtt{ab})^m \cdot \mathtt{a}^{k-m}$$

3. Für welche Eingabewörter hält die Turingmaschine in Zustand a_1 an?

   Lösungsvorschlag:

   Die Turingmaschine hält in a_1 für alle $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ mit einer der beiden Eigenschaften:

   - falls w mit $\mathtt{a}$ beginnt: $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w) + 1$
   - falls w mit $\mathtt{b}$ beginnt: $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$

4. Geben Sie eine Funktion $f(n)$ an, so dass die Laufzeit der Turingmaschine für Eingaben der Form $(\mathtt{ab})^n$ in $\Theta(f(n))$ liegt.

   Lösungsvorschlag:

   $$f(n) = n$$

5. Geben Sie eine Funktion $g(n)$ an, so dass die Laufzeit der Turingmaschine für Eingaben der Form $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ in $\Theta(g(n))$ liegt.

   Lösungsvorschlag:

   $$g(n) = n^3$$