Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 (3+2 Punkte)
Seien $P, Q, R, S \subseteq (D \times D)$ zweistellige Relationen auf einer nichtleeren Menge D.

a) Beweisen Sie:

$$P^* \circ Q = \bigcup_{i=0}^{\infty} (P^i \circ Q)$$

b) Zeigen Sie, dass für beliebige P, Q, R, S gilt:
$P \subseteq Q,\ R \subseteq S \Rightarrow P \circ R \subseteq Q \circ S$.

Lösung 6.1

a) Für alle $x, z \in D$ gilt:

$$\begin{array}{cc} & (x,z) \in (P^* \circ Q) \\ \Leftrightarrow & \exists y \in D : (y,z) \in P^* \wedge (x,y) \in Q \\ \Leftrightarrow & \exists y \in D : (y,z) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} P^i \wedge (x,y) \in Q \\ \Leftrightarrow & \exists y \in D : \exists i \in \mathbb{N}_0 : (y,z) \in P^i \wedge (x,y) \in Q \\ \Leftrightarrow & \exists i \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in D : (y,z) \in P^i \wedge (x,y) \in Q \\ \Leftrightarrow & \exists i \in \mathbb{N}_0 : (x,z) \in P^i \circ Q \\ \Leftrightarrow & (x,z) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (P^i \circ Q). \end{array}$$

b) Sei $(x, z) \in P \circ R$. Wir zeigen $(x, z) \in Q \circ S$.
Wenn $(x, z) \in P \circ R$, dann gibt es ein $y \in D$ mit $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$.
Da $P \subseteq Q \wedge R \subseteq S$ gilt auch $(x, y) \in S \wedge (y, z) \in Q$, also auch $(x, z) \in Q \circ S$.

Aufgabe 6.2 (2+1+2 Punkte)
Es bezeichne $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, also $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Gegeben sei eine Ziffernmenge $Z_{-2} = \{\mathtt{N}, \mathtt{E}\}$ mit der Festlegung $\mathrm{num}_2(\mathtt{N}) = 0$ und $\mathrm{num}_2(\mathtt{E}) = 1$. Analog zum Vorgehen in der Vorlesung definieren wir eine Abbildung $\mathrm{Num}_{-2} : Z_{-2}^* \to \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$\mathrm{Num}_{-2}(\varepsilon) = 0$$
$$\forall w \in Z_{-2}^* \; \forall x \in Z_{-2} : \mathrm{Num}_{-2}(wx) = -2 \cdot \mathrm{Num}_{-2}(w) + \mathrm{num}_2(x)$$

a) Geben Sie für $w \in \{\mathtt{E}, \mathtt{EN}, \mathtt{EE}, \mathtt{ENE}, \mathtt{EEN}, \mathtt{EEE}\}$ jeweils $\mathrm{Num}_{-2}(w)$ an.

b) Für welche Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $w \in Z_{-2}^*$ mit $\mathrm{Num}_{-2}(w) = x$?

c) Wie kann man an einem Wort $w \in Z_{-2}^*$ erkennen, ob $\mathrm{Num}_{-2}(w)$ negativ, Null oder positiv ist?

Lösung 6.2

a) $\mathrm{Num}_{-2}(\mathtt{E}) = \mathrm{Num}_{-2}(\varepsilon \cdot \mathtt{E}) = -2 \cdot \mathrm{Num}_{-2}(\varepsilon) + \mathrm{num}_2(\mathtt{E}) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$,

$\mathrm{Num}_{-2}(\mathtt{EN}) = -2$,

$\mathrm{Num}_{-2}(\mathtt{EE}) = -1$,

$\mathrm{Num}_{-2}(\mathtt{ENE}) = 5$,

$\mathrm{Num}_{-2}(\mathtt{EEN}) = 2$.

$\mathrm{Num}_{-2}(\mathtt{EEE}) = 3$.

Hinweis: Es genügt, die Zahlenwerte anzugeben; Berechnungen waren nicht verlangt.

b) Für **alle** Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $w \in Z_{-2}^*$ mit $\mathrm{Num}_{-2}(w) = x$.

c) Wenn $w \in \{\mathtt{N}\}^*$, also nur aus N's besteht, ist $\mathrm{Num}_{-2}(w) = 0$.

Sei l die Länge des Suffixes von w ab dem ersten E (so dass führende N's nicht zur Länge gezählt werden). $\mathrm{Num}_{-2}(w)$ ist positiv, wenn l ungerade ist, und negativ, wenn l gerade ist.

Hinweis: „Behandlung“ der führenden „Nullen“ ist wichtig.

Aufgabe 6.3 (3+3 Punkte)
Gegeben sei folgende Abbildung $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Z}$, mit $f(n) = 1 - 3n$, wobei $\mathbb{Z}$ wieder die Menge der ganzen Zahlen ist.

a) Gibt es eine Abbildung $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_+$, so dass $f \circ g = I_{\mathbb{Z}}$? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Gibt es eine Abbildung $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_+$, so dass $h \circ f = I_{\mathbb{N}_+}$? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung 6.3

a) Es gibt keine solche Abbildung g.

Angenommen es gäbe eine solche Abbildung g, mit $f \circ g = I_{\mathbb{Z}}$. Dann müsste für alle $z \in \mathbb{Z}$ gelten: $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = z$.

Also z.B. auch für 42:

$$\begin{aligned} 42 =& f(g(42)) = 1 - 3 \cdot g(42) \\ \Leftrightarrow -\frac{41}{3} =& g(42) \end{aligned}$$

Da $-\frac{41}{3} \notin \mathbb{N}_+$, kann es nicht Funktionswert einer solchen Abbildung $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_+$ sein.

b) Es gibt eine solche Abbildung h (sogar unendlich viele). Z. B.:

$$h(z) = \begin{cases} (1-z)/3, & \text{wenn } z \leq 1 \wedge (1-z) \text{ modulo } 3 = 0 \\ 42, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist $(h \circ f)(n) = (h(f(n)) = h(1 - 3n)$.

$1 - (1 - 3n) = 3n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_+$ durch 3 teilbar $\Rightarrow (h \circ f)(n) = h(1 - 3n) = (1 - (1 - 3n))/3 = 3n/3 = n$

Also folgt $h \circ f = I_{\mathbb{N}_+}$

Hinweis: h muss vollständig definiert werden, also auch für Zahlen, die nicht die Bedingung „$z \leq 1 \wedge (1-z)$ modulo $3 = 0$“ erfüllen (sonst wäre h nicht linkstotal).

Aufgabe 6.4 (3+2 Punkte)
Gegeben sei folgende Abbildung über dem Alphabet $A = \{\texttt{a},\texttt{b},\texttt{c},\ldots,\texttt{z}\}$.

$$R(\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$\forall w \in A^* : \forall x \in A : R(wx) = x \cdot R(w).$$

a) Ist R ein Homomorphismus? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Geben Sie ein weiteres Alphabet A' an, so dass R ein Homomorphismus ist.

Lösung 6.4

a) R ist kein Homomorphismus.

   $R(\texttt{a}) = \texttt{a}$

   $R(\texttt{b}) = \texttt{b}$

   $R(\texttt{ab}) = \texttt{ba}$

   Es ist also $R(\texttt{ab}) = \texttt{ba} \neq \texttt{ab} = R(\texttt{a}) \cdot R(\texttt{b})$

   Wäre R ein Homomorphismus, müsste aber gelten: $R(\texttt{ab}) = R(\texttt{a}) \cdot R(\texttt{b})$.

   Punkteverteilung: Für das Erkennen, dass R kein Homomorphismus ist, gibt es 1 Punkt und 2 Punkte für eine korrekte Begründung.

b) Für Alphabete mit nur einem Symbol ist R ein Homomorphismus. Also z.B. für $A' = \{\texttt{a}\}$.