Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1 (2+2+2 Punkte)
Geben Sie für folgende aussagenlogische Formeln jeweils einen arithmetischen Ausdruck an, so dass das Ergebnis den Wahrheitswerten der aussagenlogischen Formel entspricht. Verwenden Sie für den Ausdruck nur die Operatoren +, - und · sowie konstante Zahlen. 0 bzw. 1 repräsentiert dabei den Wahrheitswert *falsch* bzw. *wahr*.

a) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

b) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$

c) $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
Hinweis: „$\Leftrightarrow$“ ist genau dann wahr, wenn die Wahrheitswerte von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ identisch sind.

Lösung 4.1

a) $\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

b) $1 - \mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

c) $(1 - \mathcal{A}) \cdot (1 - \mathcal{B}) + \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ oder alternativ $1 - \mathcal{A} - \mathcal{B} + 2 \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Hinweis: Natürlich sind auch andere Lösungen möglich. Wichtig ist jedoch, dass die Ergebnisse den Wahrheitswerten der aussagenlogischen Formeln entsprechen. Klammern dürfen auch verwendet werden.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)
Gegeben sei folgendes Programmstück:

$X_0 \leftarrow 2$
$Y_0 \leftarrow 5$
for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**
    $j \leftarrow i$
    $Y_{j+1} \leftarrow 5Y_j - 6X_j$
    $X_{j+1} \leftarrow Y_j$
od

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Aussage:
$Y_j = 2^{j+1} + 3^{j+1} \wedge X_j = 2^j + 3^j$ ist Schleifeninvariante.

Lösung 4.2
Wir beweisen die Korrektheit der Schleifeninvariante durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $j = 0$**:** $2^{0+1} + 3^{0+1} = 5 = Y_0 \wedge 2^0 + 3^0 = 2 = X_0$. $\surd$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $j \in \mathbb{N}_0$ gelte
$Y_j = 2^{j+1} + 3^{j+1} \wedge X_j = 2^j + 3^j$.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch $Y_{j+1} = 2^{j+2} + 3^{j+2} \wedge X_{j+1} = 2^{j+1} + 3^{j+1}$ gelten muss.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
Y_{j+1} &= 5Y_j - 6X_j && \text{nach Algorithmus} \\
&= 5(2^{j+1} + 3^{j+1}) - 6(2^j + 3^j) && \text{nach Ind.vor.} \\
&= 10 \cdot 2^j + 15 \cdot 3^j - 6 \cdot 2^j - 6 \cdot 3^j \\
&= 4 \cdot 2^j + 9 \cdot 3^j \\
&= 2^{j+2} + 3^{j+2} \\
&= 2^{(j+1)+1} + 3^{(j+1)+1} && \text{letzte Zeile für die ganz Genauen}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt nach Algorithmus und IV: $X_{j+1} \overset{\text{Alg}}{=} Y_j \overset{\text{IV}}{=} 2^{j+1} + 3^{j+1}$ $\square$.

Punkteverteilung: Ein Punkt auf richtige Antwort „gilt“ und für die Induktion $1 + 0.5 + 1.5$. Wenn man die letzte Zeile des IS nicht hat, machts auch nichts.

Aufgabe 4.3 (1+4 Punkte)
Ein Behälter enthält insgesamt a schwarze und b weiße Kugeln. Außerdem gibt es einen beliebig großen Vorrat weiterer Kugeln außerhalb des Behälters.
Es wird so lange wie möglich immer wieder der folgende Schritt wiederholt: Zunächst werden zufällig zwei Kugeln aus dem Behälter herausgenommen. Haben diese die gleiche Farbe, werden sie zur Seite gelegt und eine schwarze Kugel (aus dem Vorrat) in den Behälter gegeben. Sind die gezogenen Kugeln verschiedenfarbig, dann wird die weiße Kugel wieder in den Behälter gegeben und die schwarze Kugel zur Seite gelegt.

a) Wie oft lässt sich ein solcher Schritt wiederholen, bis es nicht mehr weitergeht?

b) Was können Sie über das Endergebnis sagen? Formulieren Sie eine Invariante, und zeigen Sie, wie daraus Ihre Behauptung folgt. Beweisen Sie außerdem, dass es sich um eine Invariante handelt.

   Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle a, b gerade oder ungerade.

Lösung 4.3

a) Unabhängig von den gezogenen Farben werden bei jedem Zug zwei Kugeln entnommen und eine wieder in den Behälter zurück gelegt. Die Anzahl der Kugeln im Behälter wird also in jedem Schritt um eins verringert. Folglich sind genau $a + b - 1$ Züge möglich, da sich nach dem $(a + b - 1)$. Zug nur noch eine Kugel im Behälter befindet.

b) Es gibt drei Möglichkeiten für die Farbkombination der beiden gezogenen Kugeln:

   1.) eine weiße und eine schwarze Kugel

   2.) zwei schwarze Kugeln

   3.) zwei weiße Kugeln

   In den ersten beiden Fällen wird jeweils die Anzahl der schwarzen Kugeln im Behälter um eins verringert, während die Anzahl der weißen Kugeln gleich bleibt. Im dritten Fall wird die Anzahl der weißen Kugeln um zwei verringert, während die Anzahl der schwarzen Kugeln um eins erhöht wird.

   Sei w_i die Anzahl der weißen und s_i die Anzahl der schwarzen Kugeln,die nach i Zügen noch im Behälter sind, wobei $0 \leq i \leq (a+b-1)$. Im ersten und zweiten Fall ist folglich $w_i = w_{i-1}$ und $s_i = s_{i-1} - 1$, im dritten Fall $w_i = w_{i-1} - 2$ und $s_i = s_{i-1} + 1$. Daraus ist nun leicht erkennbar, dass sich die Anzahl der weißen Kugeln nur in Zweier-Schritten verringern kann, während sich die Anzahl der schwarzen Kugeln in Einer-Schritten erhöhen oder verringern kann.

   Nun können wir folgende Invariante für $i > 0$ formulieren:

   - $\forall i \in \mathbb{G}_{a+b}$:Parität(w_i) = Parität(w_0) bzw $w_i \bmod 2 = w_0 \bmod 2$.
   - Oder in Worten: Die Anzahl der weißen Kugeln modulo 2 (also die Parität) bleibt gleich.

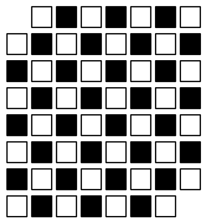
   Laut Aufgabenstellung ist $s_0 = a$ und $w_0 = b$. Wir wissen aus Teilaufgabe a), dass am Ende nach $a + b - 1$ Schritten genau eine Kugel übrigbleibt. Ist b gerade, dann muss die letzte Kugel schwarz sein, da sich die Anzahl der weißen in Zweier-Schritten auf 0 verringert. Ist b jedoch ungerade, dann bleibt am Ende eine weiße Kugel übrig. Das Endergebnis ist folglich unabhängig davon, ob a gerade oder ungerade ist.

   Punkteverteilung: je ein Punkt für richtiges Endergebnis, Invariante, Beweis der Invarianz und Schlussfolgerung daraus.

Hinweis: Diese Lösung ist deutlich ausführlicher als wir es von den Studierenden erwarten!

Aufgabe 4.4 (3 Punkte)

Ein Schachbrett besteht aus 8×8 schwarz oder weiß gefärbten Feldern, wobei zwei benachbarte Felder immer unterschiedliche Farbe besitzen. Die beiden äußeren sich diagonal gegenüberliegenden Felder werden aus dem Schachbrett herausgebrochen, so dass ein Brett wie in der gezeigten Abbildung entsteht.



Desweiteren sind beliebig viele Spielsteine vorhanden, wobei ein Spielstein die Länge von 2 Feldern und die Breite eines Feldes besitzt. Der folgende Prozess wird so lange wie möglich wiederholt: Lege ein Spielstein horizontal oder vertikal auf 2 benachbarte Felder des Schachbrettes. Der Spielstein darf nicht diagonal gelegt werden und keinen anderen Spielstein überdecken.
Ist es möglich das komplette Brett mit Spielsteinen zu bedecken? Begründen Sie Ihre Antwort und formulieren Sie eine Invariante, die nach dem Legen jedes Spielsteines gilt und aus der sich das Ergebnis nachweisen lässt.

Lösung 4.4
Es ist nicht möglich das vorhandene Schachbrett komplett mit den Spielsteinen zu bedecken.
Durch das Herausbrechen zwei gleichfarbiger (in unserem Falle schwarzer) Felder, befinden sich mehr weiße als schwarze Felder sichtbar auf dem Brett. Durch das korrekte Legen eines Spielsteins wird immer ein schwarzes und ein weißes Feld abgedeckt, so dass sich die Überzahl an sichtbaren weißen Feldern nicht beseitigen lässt.
Sei w_i die Anzahl der noch sichtbaren weißen Felder und s_i die Anzahl der noch sichtbaren schwarzen Felder nach Legen des i-iten Spielsteins.
Als Invariante lässt sich also folgendes formulieren:

- Die Anzahl der weißen Felder ist um 2 größer als die der schwarzen Felder, d. h. $w_i = s_i + 2$.

Folglich kann man nie dazu kommen, dass alle Felder bedeckt sind, denn dann wäre $w_i = s_i = 0$.

Punkteverteilung: Je ein Punkt auf richtige Antwort „nein“, Invariante und Schlussfolgerung daraus.