Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 13

Aufgabe 13.1 (3 Punkte)
Finden Sie (z.B. im Internet oder in der Fachliteratur) drei unentscheidbare Probleme, die weder in der Vorlesung noch in der Übung noch auf diesem Übungsblatt vorgestellt wurden.

Lösung 13.1

- Post'sches Korrespondenzproblem
- Lösbarkeit Diophantischer Gleichungen
- Das Wortproblem für rekursiv dargestellte Gruppen
- Das Parkettierungsproblem
- Feststellen, ob ein zweidimensionaler Zellularautomat umkehrbar ist
- ...
- *Halteproblem für Turingmaschinen mit Eingaben ungleich Codierung der Turingmaschine oder leerem Wort geben Punkte für kreatives Ausnutzen von Schlupflöchern in der Aufgabenstellung*

Aufgabe 13.2 (3+2+2 Punkte)
Zu einer gegebenen Turingmaschine T sei eine Relation R_T auf den Konfigurationen von T wie folgt definiert: (c, d) liegt in R_T, falls es ein t in $\mathbb{N}_0$ gibt, so dass $\Delta_t(c) = d$ oder $\Delta_t(d) = c$ gilt.

a) Ist R_T eine Äquivalenzrelation? Geben Sie für jede der drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation an, ob R sie hat, und begründen Sie Ihre Antwort.

   (Hinweis: Was eine Äquivalenzrelation ist, wurde am Ende des Abschnitts 11.2 über ungerichtete Graphen definiert.)

b) Erklären Sie, wie man allgemein zu einer Turingmaschine T eine Turingmaschine T' konstruieren kann, die die folgenden Eigenschaften hat:

   - Sie hält für genau die gleichen Eingaben wie T.
   - Am Ende jeder haltenden Berechnung von T' stehen auf dem Band nur Blanksymbole.

- Wenn T' hält, tut sie das immer im gleichen Zustand H.

c) Erklären Sie, wie Sie das Halteproblem entscheiden könnten, wenn Sie einen Algorithmus hätten, der Ihnen für jede Turingmaschine T und beliebige Konfigurationen c und d von T in endlicher Zeit sagt, ob das Paar (c, d) in R_T liegt.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b) .

Lösung 13.2

a) R ist reflexiv, symmetrisch, aber **nicht** transitiv.

- Reflexivität: Sei c eine beliebige Konfiguration von T. Für $t = 0$ gilt $\Delta_t(c) = c$, und somit folgt $(c, c) \in R_T$.
- Symmetrie: Falls für Konfigurationen c, d gilt $(c, d) \in R_T$, folgt, dass es ein $t \in \mathbf{N}_0$ gibt, so dass $\Delta_t(c) = d$ oder $\Delta_t(d) = c$ gilt.

  Dies bedeutet, dass $\Delta_t(d) = c$ oder $\Delta_t(c) = d$ gilt, was äquivalent ist zu $(d, c) \in R_T$.
- Transitivität: Gegeben sei eine Turingmaschine mit Bandalphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \square\}$ und Anfangszustand z_0, die einfach von links nach rechts durchlaufend alle Buchstaben durch $\square$ ersetzt, ohne ihren Zustand zu ändern.

  Dann gilt $(\square z_0\mathtt{aaaabbb}\square, \square z_0\mathtt{bbb}\square) \in R_T$ und $(\square z_0\mathtt{bbbbbbb}\square, \square z_0\mathtt{bbb}\square) \in R_T$, aber nicht $(\square z_0\mathtt{aaaabbb}\square, \square z_0\mathtt{bbbbbbb}\square) \in R_T$.

  Somit ist R_T nicht transitiv.

b) Wir benutzen das Bandalphabet X, die Zustände Z und die Überführungsfunktion f von T; weiterhin fügen wir neue Zustände L wie "links", D wie "delete" und H hinzu sowie ein neues Bandsymbol B wie "Blank".

Wann immer T ein Zeichen durch ein Blanksymbol ersetzt, ersetzt T' das Zeichen durch das Symbol B; dadurch entstehen keine Lücken innerhalb der Bandbeschriftung. Wann immer T' ein B liest, macht T' das Gleiche, wie wenn T ein Blanksymbol lesen würde.

Für jedes Paar $(z, x) \in Z \times X$, für das $f(z, x)$ nicht definiert ist, gehen wir in T' in den Zustand L über, lassen das Zeichen stehen und gehen nach links.

T' geht im Zustand L nach links, bis ein Blanksymbol gelesen wird; dann geht T' in den Zustand D über und geht, die Bandsymbole durch $\square$ ersetzend, bis nach rechts durch; sobald T' im Zustand D auf ein Blanksymbol trifft, geht die Turingmaschine in den Zustand H über, schreibt nichts auf das Band und hält.

Hinweis: Eine weniger formale Beschreibung, also: Wenn T hält geht T' nach links, löscht alle Symbole und hält dann in Zustand H geht auch in Ordnung. Für das Nichtbeachten eventueller Blanksymbole innerhalb der Beschriftung nur 0,5 Punkte abziehen. Und natürlich kann man links und rechts auch vertauschen.

c) Gegeben eine Turingmaschine T, von der ich wissen will, ob Sie bei Eingabe der Codierung von T hält oder nicht.

Ich konstruiere wie in Teilaufgabe b) beschrieben die entsprechende Turingmaschine T', die genau dann hält, wenn T hält, und deren Endkonfiguration i($d = \Box H \Box$) ich in diesem Fall kenne.

Sei c die Anfangskonfiguration von T bei Eingabe der Codierung von T. T hält genau dann, wenn es ein $t \in \mathbf{N}_0$ gibt, so dass $(c, d) \in R_{T'}$ gilt.

Mit dem angenommenen Algorithmus könnte ich das in endlicher Zeit feststellen, und damit das Halteproblem entscheiden.

Aufgabe 13.3 (2+1+1+1 Punkte)

Die Turingmaschine T mit Anfangszustand S sei durch folgende Überführungsfunktion gegeben:

	S	$S_{\mathtt{a}}$	$S_{\mathtt{b}}$	R
$\mathtt{a}$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{a}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{a}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(a, R, 1)$
$\mathtt{b}$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(\mathtt{b}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{b}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(b, R, 1)$
$\mathtt{X}$	$(\mathtt{X}, S, 1)$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(\mathtt{X}, S, 1)$
$\Box$	-	$(\mathtt{a}, R, 1)$	$(\mathtt{b}, R, 1)$	-

a) Was steht bei Eingabe eines Wortes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ am Ende der Berechnung auf dem Band?

b) Welche Platzkomplexität hat T? (Exakte Angabe in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe!)

c) Geben Sie eine einfache Funktion $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ an, so dass die Zeitkomplexität von T in $\Theta(f(n))$ liegt.

d) Ändern Sie die Turingmaschine so ab, dass am Ende der Berechnung alle auf dem Band stehenden $\mathtt{X}$ gelöscht werden.

Lösung 13.3

a) Am Ende steht das Wort $R(w)\mathtt{X}^{|w|}$ auf dem Band, wobei $R(w)$ das Spiegelbild von w ist.

b) Eingabe der Länge n: Platzbedarf ist $2n + 1$.

c) Eingabe der Länge n: Zeitbedarf in $\Theta(n^2)$

d)

	S	$S_{\mathtt{a}}$	$S_{\mathtt{b}}$	R	D
$\mathtt{a}$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{a}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{a}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(a, R, 1)$	-
$\mathtt{b}$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(\mathtt{b}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{b}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(b, R, 1)$	-
$\mathtt{X}$	$(\mathtt{X}, S, 1)$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{a}}, -1)$	$(\mathtt{X}, S_{\mathtt{b}}, -1)$	$(\mathtt{X}, S, 1)$	$(\square, D, -1)$
$\square$	$(\square, D, -1)$	$(\mathtt{a}, R, 1)$	$(\mathtt{b}, R, 1)$	-	-

Aufgabe 13.4 (2+3+2 Punkte)
Die Relation $R \subseteq \mathbf{N}_+ \times \mathbf{N}_+$ sei gegeben durch:
$nRm \iff$ Es gibt genau so viele verschiedene Primzahlen, die n teilen, wie es verschiedene Primzahlen gibt, die m teilen.

a) Geben Sie für $n \in \{12, 98, 4096, 500000\}$ jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbf{N}_+$ an, so dass nRm gilt.

b) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

c) Zeigen oder widerlegen Sie:
$\forall n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbf{N}_+ : n_1 R m_1 \wedge n_2 R m_2 \Rightarrow n_1 \cdot n_2 R m_1 \cdot m_2$

Lösung 13.4

a)

n	12	98	4096	500000
m	6	6	2	6

b)
- Reflexivität: Für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt: Die Anzahl der Primzahlen, die n teilen, ist die Anzahl der Primzahlen, die n teilen, also gilt nRn.
- Symmetrie: Für alle $n, m \in \mathbf{N}_0$ gilt: Falls die Anzahl der Primzahlen, die n teilen, gleich der Anzahl der Primzahlen ist, die m teilen, gilt auch:
  Die Anzahl der Primzahlen, die m teilen, ist gleich der Anzahl der Primzahlen, die n teilen, und es folgt $nRm \Rightarrow mRn$.

- Transitivität: Für alle $n, m, p \in \mathbf{N}_0$ gilt: Falls die Anzahl der Primzahlen, die n teilen, gleich der Anzahl der Primzahlen ist, die m teilen, und die Anzahl der Primzahlen, die m teilen, gleich der Anzahl der Primzahlen ist, die p teilen, ist die Anzahl der Primzahlen, die n teilen, gleich der Anzahl der Primzahlen, die p teilen.

  Es folgt $nRm \wedge mRp \Rightarrow nRp$.

Hinweis: Alternativ können Schlaumeier auch sagen, dass „die Anzahl der Primzahlen, die n teilen“ eine Abbildung P von $\mathbb{N}_+$ nach $\mathbb{N}_0$ ist, und laut Definition nRm gilt, falls $P(n) = P(m)$. Folglich hat Herr Worsch auf Seite 8 der Folien zu Kapitel 17 gezeigt, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

c) Die Aussage ist falsch: Wähle $n_1 = n_2 = m_1 = 2$ und $m_2 = 3$.

Dann gilt $n_1 R m_1$ und $n_2 R m_2$, aber $(n_1 \cdot n_2 = 4, m_1 \cdot m_2 = 6)$ liegt nicht in R, da es zwei Primzahlen gibt, die 6 teilen, aber nur eine, die 4 teilt.