Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 10

Aufgabe 10.1 (2+2+2+2 Punkte)

Geben Sie (wenn möglich) mit Hilfe des Master-Theorems einen Ausdruck für die Laufzeit von $T(n)$ an. Falls das Mastertheorem nicht anwendbar ist, begründen Sie, warum das nicht möglich ist. In diesem Fall brauchen Sie keine Abschätzung anzugeben.

a) $T(n) = 9T(n/3) + n^2 + 2n + 1$

b) $T(n) = \sqrt{3}T(n/2) + \log n$

c) $T(n) = 4T(n/4) + n \log n$

d) $T(n) = 2^n T(n/2) + n^n$

Lösung 10.1

a) Es gilt $n^{\log_3 9} = n^2$ und $n^2 + 2n + 1 \in \Theta(n^2)$

Mit dem Master-Theorem folgt $T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$.

b) Da für jedes $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < \log_2(\sqrt{3})$ gilt $\log n \in O(n^{\log_2(\sqrt{3})-\epsilon})$, folgt nach dem Master-Theorem:

$T(n) \in \Theta(n^{\log_2 \sqrt{3}})$.

c) Es gilt $n^{\log_4 4} = n$.

Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\log n \in O(n^\epsilon)$, und somit folgt $n \log n \in O(n^{1+\epsilon})$.

Es gibt somit kein $\epsilon > 0$, so dass $n \log n \in \Omega(n^{1+\epsilon})$ gilt, und das Master-Theorem ist somit nicht anwendbar.

d) Das Master-Theorem gilt für Formeln der Form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ mit konstantem a.

Da 2^n nicht konstant ist, lässt sich das Master-Theorem hier nicht anwenden.

Aufgabe 10.2 (2+3 Punkte)

a) Gegeben sei ein Homomorphismus $k : X^* \to Y^*$. Geben Sie einen möglichst kleinen Mealy-Automaten $M = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ an, so dass für alle $w \in X^*$ gilt: $g^{**}(z_0, w) = k(w)$.

b) Gegeben sei ein Mealy-Automat $M = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| = 1$. Zeigen Sie: $k : X^* \to Y^* : w \mapsto g^{**}(z_0, w)$ ist ein Homomorphismus.

Lösung 10.2

a) Wir wählen $Z = \{z_0\}$ und setzen:

$$\forall x \in X : \forall z \in Z : f(z, x) = z_0$$
$$\forall x \in X : \forall z \in Z : g(z, x) = k(x)$$

b) Wir müssen zeigen:

(i) $k(\epsilon) = g^{**}(z_0, \epsilon) = \epsilon$.
Das gilt nach Definition von g^{**}.

(ii) Es gibt eine Funktion $k' : X \to Y^*$, so dass gilt:
$\forall w \in X^* \forall x \in X : k(wx) = k(w)k'(x)$
Nach Definition gilt:
$k(wx) = g^{**}(z_0, wx) = g^{**}(z_0, w)g(f^*(z_0, w), x)$.
Da $|Z| = 1$ gilt, folgt für alle Wörter $w \in X^*$: $f^*(z_0, w) = z_0$, also gilt $k(wx) = k(w)g(z_0, x)$.
Definieren wir nun $k' : X \to Y^*$ durch $x \mapsto g(z_0, x)$, ergibt sich gerade $k(wx) = k(w)k'(x)$.
Damit ist k ein Homomorphismus.

Aufgabe 10.3 (3+2+2 Punkte)
Im Folgenden sei $X = Y = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Geben Sie jeweils einen Mealy-Automaten an, der jede Eingabe $w \in X^*$ wie folgt verarbeitet:

a) Jeder Block aufeinanderfolgender gleicher Zeichen wird durch ein einzelnes dieser Zeichen ersetzt. Zum Beispiel soll bei Eingabe `aaabbcccc` die Ausgabe das Wort `abc` sein.

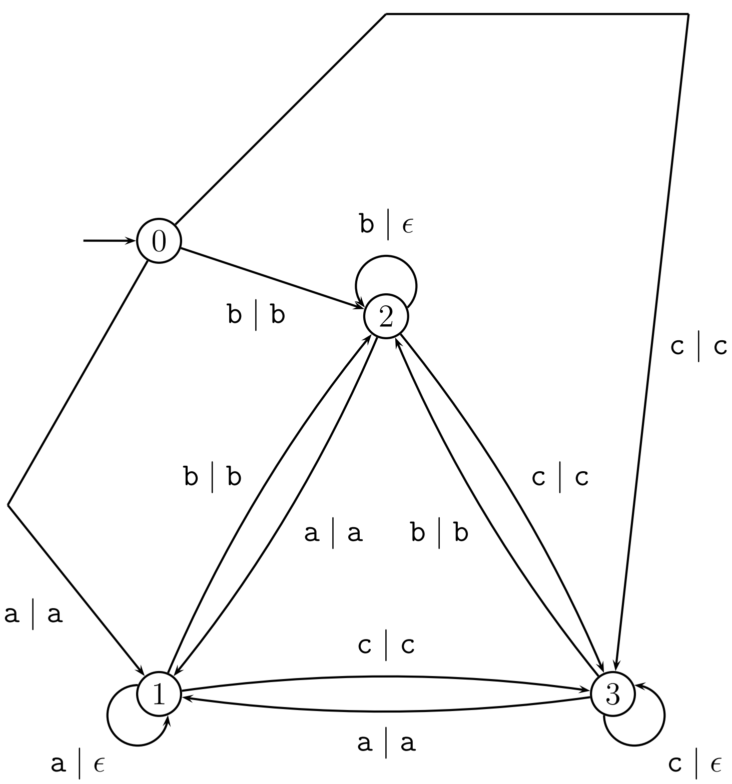
b) Direkt hinter jedem `a` wird ein `b` eingefügt, sofern sich dort noch keines befindet. Zum Beispiel soll bei Eingabe `aabc` die Ausgabe das Wort `ababc` sein.

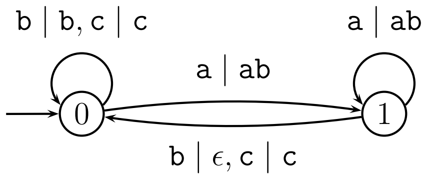
c) Jeder Block der Form $\mathtt{c}^k$ mit $k \in \mathbb{N}_+$, der direkt hinter einem `a` steht, wird gelöscht. Zum Beispiel soll bei Eingabe `aacccbc` die Ausgabe das Wort `aabc` sein.

Mit der Ausgabe eines Mealy-Automaten (mit Anfangszustand z_0) zu Eingabe w ist $g^{**}(z_0, w)$ gemeint.
Achtung: Automaten mit mehr als vier Zuständen werden nicht korrigiert. Das Gleiche gilt, wenn nicht erkennbar ist, welche Beschriftungen zu welchen Kanten gehören.

Lösung 10.3

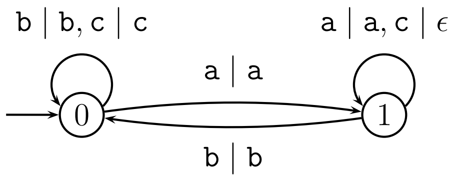
a)





b)

Achtung: Man achte darauf, dass der Automat auch dann das richtige macht, wenn das letzte Zeichen ein `a` *ist (ansonsten halben Punkt Abzug).*



c)