Lösungsvorschläge zur Klausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik 10. März 2010

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	6	6	7	7	8	11
tats. Punkte						

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (2+2+2 = 6 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Abbildungen; für $n \in \mathbb{N}_+$ gelte wie in der Vorlesung: $\mathbb{G}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

a) Sei $n \geq 1$. Wie viele Abbildungen gibt es von einer n-elementigen Menge in eine 2-elementige Menge, die **nicht** surjektiv sind?

   Lösung: 2

   Erklärung: Eine Abbildung auf eine 2-elementige Menge $\{a, b\}$ kann nur dann surjektiv sein, falls alle Elemente auf a oder alle Elemente auf b abgebildet werden.

b) Geben Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Es gibt mehr injektive Abbildungen von $\mathbb{G}_n$ nach $\mathbb{G}_m$ als surjektive Abbildungen von $\mathbb{G}_m$ nach $\mathbb{G}_n$.

   Hinweis: Achten Sie auf die Indizes!

   Lösungsvorschlag: $n = 1, m \in \{2, 3, \ldots\}$:

   Erklärung: Es gibt dann m injektive Abbildungen von $\mathbb{G}_n$ nach $\mathbb{G}_m$, aber nur eine surjektive Abbildung von $\mathbb{G}_m$ nach $\mathbb{G}_n$.

c) Geben Sie zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Es gibt mehr surjektive Abbildungen von $\mathbb{G}_n$ nach $\mathbb{G}_m$ als injektive Abbildungen von $\mathbb{G}_m$ nach $\mathbb{G}_n$.

   Hinweis: Achten Sie auf die Indizes!

   Lösungsvorschlag: $m = 2, n \in \{4, 5 \ldots\}$:

   Erklärung: Es gibt dann $n(n-1)$ injektive Abbildungen von $\mathbb{G}_m$ nach $\mathbb{G}_n$ und $2^n - 2$ surjektive Abbildungen von $\mathbb{G}_n$ nach $\mathbb{G}_m$. (siehe Teilaufgabe a))

Aufgabe 2 (2+2+2 = 6 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Huffman-Codierungen.

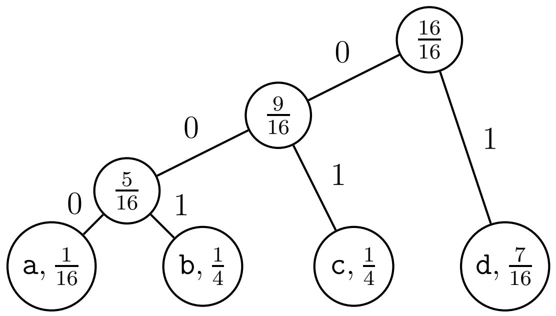
Gegeben sei ein Wort über dem Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ mit folgenden **relativen** Häufigkeiten:

a	b	c	d
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - x$

wobei $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ gilt.

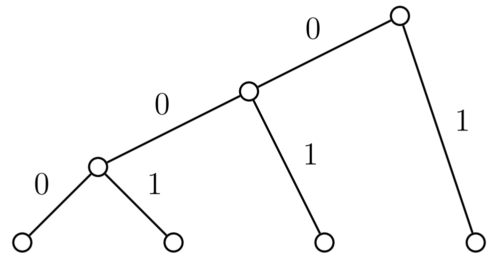
a) Erstellen Sie den Huffman-Baum für $x = \frac{1}{16}$.

Lösung:



b) Welche Struktur muss der Huffman-Baum haben, damit die Huffman-Codierung eines Wortes $w \in A^+$ mit den in der Tabelle angegebenen relativen Häufigkeiten echt kürzer als $2|w|$ sein kann?

Lösung:



c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ werden Wörter mit den angegebenen relativen Häufigkeiten auf genau doppelt so lange Wörter über $\{0, 1\}$ abgebildet?

Lösung: Dies gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$.

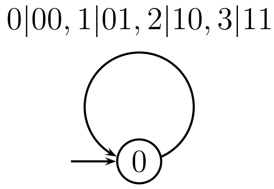
Aufgabe 3 (2+2+3 = 7 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Mealy-Automaten.

a) Sei $X = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}\}$ und $w = \mathtt{2103} \in X^*$. Geben Sie ein Wort $w' \in \{0, 1\}^*$ an, so dass $Num_2(w') = Num_4(w)$ gilt.

$Num_4(w) = Num_2(10010011)$, also **Lösung:** $w' = 10010011$.

b) Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| \leq 3, X = \{0, 1, 2, 3\}$ und $Y = \{0, 1\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ gilt: $Num_4(w) = Num_2(g^{**}(z_0, w))$.

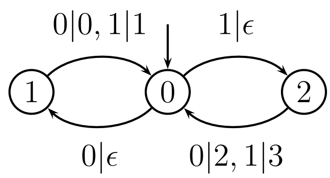
Lösungsvorschlag:



c) Geben Sie einen Mealy-Automaten $A = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit $|Z| < 4, X = \{0, 1\}$ und $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ an, so dass für alle Wörter $w \in X^*$ **mit gerader Länge** gilt: $Num_2(w) = Num_4(g^{**}(z_0, w))$.

Hinweis: $g^{**}(z_0, w)$ ist die Konkatenation aller Ausgaben, die A bei Eingabe von w erzeugt.

Lösungsvorschlag:



Aufgabe 4 (4+2+1 = 7 Punkte)

Es sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}\})$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$\forall k \in \mathbb{N}_0$: Wenn $S \Rightarrow^k w$ gilt, gilt auch $\exists n, m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \wedge w \in \{\mathtt{a}^n S \mathtt{a}^m, \mathtt{a}^n \mathtt{b} \mathtt{a}^m\}$.

Lösungsvorschlag:

Induktionsanfang: $k = 0$: $S \Rightarrow^0 w$ bedeutet $w = S = a^0 S a^0 \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \wedge w \in \{\mathtt{a}^n S \mathtt{a}^m, \mathtt{a}^n \mathtt{b} \mathtt{a}^m\}$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}_0$ gelte: Wenn $S \Rightarrow^k w$ gilt, gilt auch $\exists n, m \in \mathbb{N}_0 : n \geq m \wedge w \in \{\mathtt{a}^n S \mathtt{a}^m, \mathtt{a}^n \mathtt{b} \mathtt{a}^m\}$.

Induktionsschluss: Es gelte $S \Rightarrow^{k+1} w'$.

Dann gibt es ein $w \in \{S, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ mit $S \Rightarrow^k w \Rightarrow w'$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $n, m \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt:
$n \geq m \wedge w \in \{\mathtt{a}^n S \mathtt{a}^m, \mathtt{a}^n \mathtt{b} \mathtt{a}^m\}$

Da $w \Rightarrow w'$ gilt, muss $w = \mathtt{a}^n S \mathtt{a}^m$ gelten.

Wendet man die möglichen Produktionen an, erhält man
$w' \in \{\mathtt{a}^{n+1} S \mathtt{a}^{m+1}, \mathtt{a}^{n+1} S \mathtt{a}^m, \mathtt{a}^n \mathtt{b} \mathtt{a}^m\}$.

Da $n + 1 \geq m + 1$ und $n + 1 \geq m$ gilt, falls $n \geq m$ gilt, gibt es in jedem der Fälle $n', m' \in \mathbb{N}_0 : n' \geq m' \wedge w' \in \{\mathtt{a}^{n'} S \mathtt{a}^{m'}, \mathtt{a}^{n'} \mathtt{b} \mathtt{a}^{m'}\}$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$ gegeben.

Erklären Sie, wie man das Wort $\mathtt{a}^n \mathtt{b} \mathtt{a}^m$ aus S ableiten kann.

Lösungsvorschlag: Man ersetzt m mal das Nichtterminal S durch das Wort $\mathtt{a}S\mathtt{a}$; danach ersetzt man $n - m$ mal das Nichtterminal S durch das Wort $\mathtt{a}S$; schließlich ersetzt man S durch das Wort $\mathtt{b}$.

c) Geben Sie eine mathematische Beschreibung von $L(G)$ an.

Hinweis: Abwandlungen von $L(G) = \{w \in X^* \mid S \Rightarrow^* w\}$ geben **keine** Punkte!

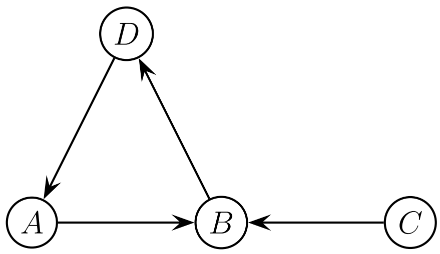
Lösung: $L(G) = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b} \mathtt{a}^m \mid n \geq m\}$

Aufgabe 5 (2+3+1+2 = 8 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

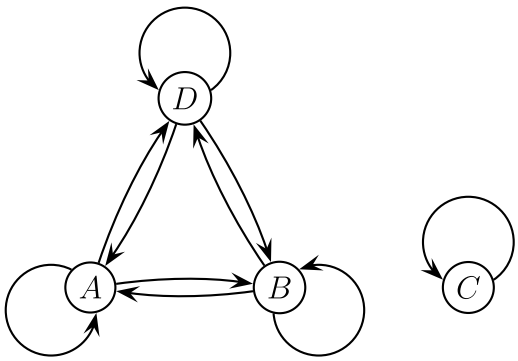
Die Relation $S \subseteq V \times V$ sei gegeben durch $\forall x, y \in V : xSy \iff$ es gibt in G einen Pfad von x nach y und es gibt in G einen Pfad von y nach x.

Die Relation $R \subseteq V \times V$ sei gegeben durch $\forall x, y \in V : xRy \iff$ es gibt in G einen Pfad von x nach y.

a) Geben Sie die Relation S für folgenden Graphen G an:



Lösung:



b) Zeigen Sie, dass S für beliebige gerichtete Graphen G eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung:

Reflexivität: Da es für alle $x \in V$ einen Pfad der Länge 0 von x nach x gibt, (sowie einen Pfad der Länge 0 von x nach x), gilt: $\forall x \in V : xSx$.

Symmetrie: $\forall x, y \in V : xSy$
$\Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x nach y und es gibt einen Pfad von y nach x
$\Rightarrow$ es gibt einen Pfad von y nach x und es gibt einen Pfad von x nach y
$\Rightarrow ySx$.

Transitivität: $\forall x, y, z \in V : xSy \wedge ySz \Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x nach y und es gibt einen Pfad von y nach x und es gibt einen Pfad von y nach z und es gibt einen Pfad von z nach y
$\Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x nach z über y und es gibt einen Pfad von z nach x über $y \Rightarrow xSz$.

c) Für welche Graphen G gibt es nur eine Äquivalenzklasse bezüglich S?

Lösung: Für streng zusammenhängende Graphen sind alle Knoten zu einander äquivalent.

d) Zeigen Sie: Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ gilt: $x_1Sx_2 \wedge y_1Sy_2 \wedge x_1Ry_1 \Rightarrow x_2Ry_2$.

Lösung:

$x_1Sx_2 \wedge y_1Sy_2 \wedge x_1Ry_1 \Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x_1 nach x_2 und es gibt einen Pfad von x_2 nach x_1 und es gibt einen Pfad von y_1 nach y_2 und es gibt einen Pfad von y_2 nach y_1 und es gibt einen Pfad von x_1 nach y_1
$\Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x_2 nach x_1 und es gibt einen Pfad von x_1 nach y_1 und es gibt einen Pfad von y_1 nach y_2
$\Rightarrow$ es gibt einen Pfad von x_2 nach y_2 über x_1 und $y_1 \Rightarrow x_2Ry_2$.

Aufgabe 6 (1+1+1+2+2+2+2 = 11 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\Box, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	$(z_1, \Box, 1)$	$(z_1, \mathtt{a}, 1)$	$(z_3, \mathtt{a}, -1)$	-	$(z_4, \mathtt{a}, -1)$	$(z_5, \mathtt{b}, 1)$
b	$(z_5, \mathtt{a}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, 1)$	$(z_4, \mathtt{a}, -1)$	$(z_4, \mathtt{b}, -1)$	$(z_5, \mathtt{a}, 1)$
$\Box$	-	-	$(z_3, \Box, -1)$	-	$(z_0, \Box, 1)$	$(z_4, \Box, -1)$

(Darstellung als Graph auf der nächsten Seite)

Die Turingmaschine wird im folgenden für Eingaben $w \in \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ verwendet, wobei der Kopf der Turingmaschine anfangs auf dem ersten Zeichen von w stehe (sofern w nicht das leere Wort ist).

a) Geben Sie die Endkonfiguration der Turingmaschine für die Eingabe $w =$ `aaabb` an.

Lösung: Die Bandbeschriftung ist `aa`, der Kopf steht im Zustand z_1 auf dem ersten Bandsymbol hinter dem Wort.

b) Die Eingabe sei $w =$ `aaabbbbb`. Geben Sie die Bandbeschriftung an, wenn T das erste Mal von Zustand z_5 in den Zustand z_4 übergeht.

Lösung: `aabbb`

c) Beschreiben Sie, was T macht, wenn T sich im Zustand z_4 befindet (bis sich der Zustand von T ändert).

Lösung: T fährt an das erste Bandsymbol vor der Bandbeschriftung(, ohne etwas an der Beschriftung zu ändern).

d) Sei $n \geq m$ und die Eingabe $w = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^m$. Welches Wort steht am Ende der Berechnung auf dem Band?

Lösung: $\mathtt{a}^{n-1}$ falls $n \geq 1$; andernfalls das leere Wort

e) Sei $n < m$ und die Eingabe $w = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^m$. Welches Wort steht auf dem Band zu dem Zeitpunkt, an dem T zum ersten Mal von Zustand z_5 in den Zustand z_4 wechselt?

Lösung: $\mathtt{a}^{m-n}\mathtt{b}^n$

f) Seien $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n < m$. Geben Sie Zahlen $n', m' \in \mathbb{N}_0$ mit $n' + m' < n + m$ an, so dass gilt:

Bei Eingabe von $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m$ ist am Ende der Berechnung das Band leer $\iff$ Bei Eingabe von $\mathtt{a}^{n'}\mathtt{b}^{m'}$ ist am Ende der Berechnung das Band leer.

Lösung: $n' = m - n, m' = n$

g) Geben Sie vier verschiedene Paare $(n, m) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ an, für die gilt: Bei Eingabe von $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m$ ist am Ende der Berechnung das Band leer.

Lösungsvorschlag: $(n, m) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), (8, 13), \ldots\}$.

Vier Paare haben genügt.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Darstellung der Turingmaschine als Graph: