Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 4

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 11. November 2009

Abgabe: 20. November 2009, 13:00 Uhr
im Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 4:	/ 19
Blätter 1 – 4:	/ 73

Aufgabe 4.1 (3+1 Punkte)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$.
Wir definieren für $i \in \mathbb{N}_0$ die formalen Sprachen $L_i \subseteq A^*$ wie folgt:

- $L_0 = \{\epsilon\}$
- $\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{\epsilon\} \cup L_i \cdot L_i \cup \{\mathtt{(}\} \cdot L_i \cdot \{\mathtt{)}\}$

Die formale Sprache $L \subseteq A^*$ erfülle $L = \{\epsilon\} \cup L \cdot L \cup \{\mathtt{(}\} \cdot L \cdot \{\mathtt{)}\}$.

a) Beweisen Sie (durch vollständige Induktion): $\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_i \subseteq L$.
b) Zeigen Sie: $\bigcup_{i=0}^{\infty} L_i \subseteq L$

(Hinweis: Dies bedeutet, dass $L' = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i \subseteq L$ die formale Sprache mit den "wenigsten" Elementen ist, für die $L' = \{\epsilon\} \cup L' \cdot L' \cup \{\mathtt{(}\} \cdot L' \cdot \{\mathtt{)}\}$ gilt.)

Aufgabe 4.2 (3+3 Punkte)
Sei M eine Menge und $\diamond : M \times M \to M$ eine assoziative Operation auf M. Weiterhin habe M ein neutrales Element e bezüglich $\diamond$, d.h. für alle $a \in M$ gilt: $a \diamond e = e \diamond a = a$. Wir definieren für alle $a \in M$: $a^0 = e$ und $\forall i \in \mathbb{N}_0 : a^{i+1} = a^i \diamond a$

a) Beweisen Sie (durch vollständige Induktion): $\forall j \in \mathbb{N}_0 : \forall i \in \mathbb{N}_0 : a^i \diamond a^j = a^{i+j}$.
b) Nennen Sie zwei Stellen in der Vorlesung, an der dieses Ergebnis anwendbar ist. Geben Sie jeweils M, e und $\diamond$ an.

Aufgabe 4.3 (2+3+2+2 Punkte)
Gegeben seien die Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}S \mid \mathtt{a}\})$.

a) Geben Sie eine mathematisch präzise Beschreibung der Sprache $L(G)$ an, die sich nicht auf G oder eine andere Grammatik bezieht.
b) Zeigen Sie: $\forall w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, S\}^* : (S \Rightarrow^* w) \Longrightarrow N_S(w) + N_a(w) > N_b(w)$.
(Hinweis: Für ein Zeichen x wurde N_x auf Übungsblatt 3 definiert.)
c) Gegeben seien Wörter $w_1, w_2 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ mit $S \Rightarrow^* w_1 S w_2$.
Welche Möglichkeiten gibt es für w_1? Welche Möglichkeiten gibt es für w_2? In welcher Beziehung stehen die Wörter w_1 und w_2? (Ohne Beweise.)
d) Geben Sie ein Wort $w \in L(G)$ an, für das es zwei verschiedene Ableitungsbäume aus S gibt. Geben Sie zwei verschiedene Ableitungsbäume von w an.