Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
31. August 2009
mit Lösunsgsvorschlägen

Klausur-nummer

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	4	4	6	8	6	8	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	Note:

Aufgabe 1 (1+1+2 = 4 Punkte)
In dieser Aufgabe geht um die formalen Sprachen

$$L_1 = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \bmod 2 = 0 \wedge m \bmod 3 = 1\}$$
$$L_2 = \{\mathtt{b}^k\mathtt{a}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \bmod 2 = 1 \wedge m \bmod 3 = 0\}$$

Geben Sie für jede der folgenden formalen Sprachen L je einen regulären Ausdruck R_L an mit $\langle R_L \rangle = L$.

a) $L = L_1$

Lösung: $(\mathtt{aa})^*\mathtt{b}(\mathtt{bbb})^*$

b) $L = L_1 \cdot L_2$

Lösung: $(\mathtt{aa})^*\mathtt{b}(\mathtt{bbb})^*\mathtt{b}(\mathtt{bb})^*(\mathtt{aaa})^*$

c) $L = L_1 \cap L_2$

Lösung: $\mathtt{b}(\mathtt{bbbbbb})^*$

Aufgabe 2 (1+1+1+1 = 4 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Abbildungen.

Im folgenden sei $n \geq 1$ eine positive ganze Zahl.

a) Wie viele Abbildungen gibt es von einer einelementigen Menge in eine n-elementige Menge?

   Lösung: n

b) Wie viele Abbildungen gibt es von einer n-elementigen Menge in eine einelementige Menge?

   Lösung: 1

c) Wie viele injektive Abbildungen gibt es von einer n-elementigen Menge in eine einelementige Menge?

   Lösung: Es gibt eine solche Abbildung, falls $n = 1$ gilt; für $n > 1$ gibt es keine solche Abbildung.

d) Wie viele injektive Abbildungen gibt es von einer 2-elementigen Menge in eine 3-elementige Menge?

   Lösung: 6

Aufgabe 3 (3+3 = 6 Punkte)
Im folgenden sei $n \geq 1$ immer eine positive ganze Zahl.

Gegeben sei eine nichtleere Menge M mit einer Halbordnung $\sqsubseteq$ darauf. Eine Folge $(a_1, \ldots, a_n)$ in M heiße *streng monoton fallend*, falls gilt:

$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : a_{i+1} \sqsubseteq a_i \wedge a_{i+1} \neq a_i.$

a) Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine streng monoton fallende Folge in M. Zeigen Sie, dass gilt:

   $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \forall j \in \{1, \ldots, n\} : i < j \Rightarrow a_j \sqsubseteq a_i.$

   Führen Sie dazu eine vollständige Induktion über die Differenz $k = j - i$ durch!

   Lösung:

   Wenn $i < j$ gilt, gilt auch $k = j - i \geq 1$. Die Induktion beginnt also mit $k = 1$.

   Induktionsanfang: $k = 1$: $j - i = 1 \Rightarrow j = i + 1 \Rightarrow a_j = a_{i+1} \sqsubseteq a_i$ nach Defintion.

   Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $k \geq 1$ gilt: Wenn $j - i = k$ gilt, folgt $a_j \sqsubseteq a_i$.

   Induktionsschluss: $k \rightarrow k + 1$.

   Wenn $j - i = k + 1$ gilt, folgt $j - (i + 1) = k$, und damit $a_j \sqsubseteq a_{i+1}$ nach Induktionsannahme.

   Nach Definition gilt $a_{i+1} \sqsubseteq a_i$, und da $\sqsubseteq$ als Halbordnung transitiv ist, folt $a_j \sqsubseteq a_i$.

   Damit ist die Behauptung gezeigt.

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n:

   $\forall n \in \mathbb{N}_+$: Falls M kein minimales Element enthält, gibt es eine streng monoton fallende Folge $(a_1, \ldots, a_n)$ mit n Elementen in M.

   Lösung:

   Induktionsanfang: $n = 1$: (a_1) ist trivialerweise eine streng monoton fallende Folge für jedes $a_1 \in M$.

   Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \geq 1$ gilt: Es gibt eine streng monoton fallende Folge $(a_1, \ldots, a_n)$ der Länge n in M.

   Induktionsschluss: $n \rightarrow n + 1$.

   Nach Induktionsannahme gibt es eine streng monoton fallende Folge $(a_1, \ldots a_n)$ in M.

Nach Aufgabenstellung ist a_n kein minimales Element. Formal bedeutet dies:
$\neg(\forall x \in M : x \sqsubseteq a_n \Rightarrow x = a_n)$
$\Rightarrow \exists x \in M : \neg(\neg(x \sqsubseteq a_n) \vee x = a_n)$
$\Rightarrow \exists x \in M : x \sqsubseteq a_n \wedge x \neq a_n)$
Dies bedeutet, dass es ein Element $x = a_{n+1} \in M$ geben muss, für das gilt: $a_{n+1} \sqsubseteq a_n$ und $a_{n+1} \neq a_n$.
Damit ist die Folge $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ ebenfalls eine streng monoton fallende Folge, und hat die Länge $n + 1$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 4 (3+2+3 = 8 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um endliche Akzeptoren mit Zustandsmenge $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$ und Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) Kann die durch den regulären Ausdruck $(\mathtt{aaaa})*$ beschriebene Sprache von einem Automaten mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X erkannt werden?

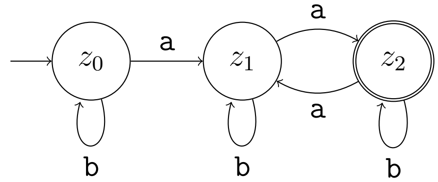
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Nein: Die vier Wörter $\epsilon, \mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{aaa}$ liegen offensichtlich in verschiedenen Nerode-Äquivalenzklassen. Somit muss der minimale endliche Automat, der $\langle(\mathtt{aaaa})\rangle$ akzeptiert, mindestens vier Zustände besitzen. Da Z nur drei Zustände enthält, kann ein Automat mit der Zustandsmenge Z diese Sprache nicht erkennen.

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X an, der genau die Wörter $w \in X^*$ akzeptiert, für die gilt:

Die Anzahl der $\mathtt{a}$ in dem Wort w ist gerade und größer als 1.

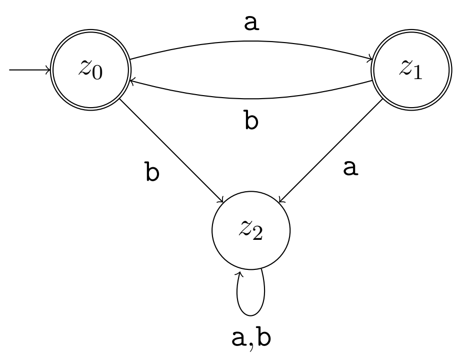
Lösung:



c) Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X an, der genau die Wörter $w \in X^*$ akzeptiert, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

- w beginnt mit `a` oder ist das leere Wort.
- In w kommt nirgends das Teilwort `aa` vor.
- In w kommt nirgends das Teilwort `bb` vor.

Lösung:



Aufgabe 5 (2+2+2 = 6 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{b}X\mathtt{a}, X \to \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X \mid \varepsilon\}$

a) Geben Sie ein Wort der Länge 5 an, das in $L(G)$ liegt, und ein Wort der Länge 5, das nicht in $L(G)$ liegt.

   Lösung: Beispiele: $\mathtt{aaaab} \in L(G), \mathtt{aabaa} \notin L(G)$

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G' = (N, T, S', P)$ an, für die gilt:
   $L(G') = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \setminus L(G)$

   Lösung: $G' = (\{S'\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S', \{S' \to \mathtt{a}S'\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S'\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \epsilon\})$
   Hinweis: $L(G)$ ist die Menge aller Wörter über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, die keine Palindrome sind.

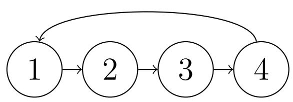
c) Geben Sie eine Abbildung $g : \mathbb{N}_0 \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ an, so dass gilt:
   $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : g(n)\mathtt{a}^m \in L(G) \iff n \neq m$

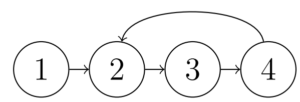
   Lösung: Beispiel: $g(n) = a^n b$
   Damit ist $g(n)\mathtt{a}^m$ genau dann ein Palindrom, wenn $n = m$ gilt, und es folgt: $g(n)a^m \in L(G) \iff n \neq m$.

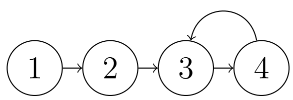
Aufgabe 6 (4+2+2 = 8 Punkte)
Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller gerichteten Graphen, für die gilt: Jeder Knoten hat den Ausgangsgrad 1 und es gibt einen Knoten, von dem aus alle anderen Knoten über einen Weg erreichbar sind.

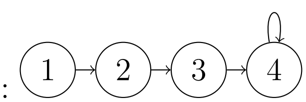
a) Zeichnen Sie alle Graphen aus $\mathcal{G}$ mit vier Knoten, von denen keine zwei Graphen isomorph sind.

Lösung:

G_1 : 

G_2 : 

G_3 : 

G_4 : 

b) Geben Sie für die Hälfte der dargestellten Graphen die Adjazenzmatrix an. Machen Sie deutlich, welche Adjazenzmatrix zu welchem Graphen gehört.

Lösung: (zwei der vier Matrizen genügen)

$$G_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_4 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie für jeden dargestellten Graphen, für den Sie keine Adjazenzmatrix angegeben haben, die Wegematrix an. Machen Sie deutlich, welche Wegematrix zu welchem Graphen gehört.

Lösung: (zwei der vier Matrizen genügen)

$$G_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_4 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (2+1+1+2+1+1 = 8 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_e, z_a, z_b, z'_a, z'_b, f_1, f_2\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\Box, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
a	$(z_0, \mathtt{a}, 1)$	$(z_1, \mathtt{a}, 1)$	$(z_2, \mathtt{a}, 1)$	$(z_3, \mathtt{a}, -1)$	$(z_a, \Box, 1)$
b	$(z_0, \mathtt{b}, 1)$	$(z_1, \mathtt{b}, 1)$	$(z_2, \mathtt{b}, 1)$	$(z_3, \mathtt{b}, -1)$	$(z_b, \Box, 1)$
#	$(z_1, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_2, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_2, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_3, \mathtt{\#}, -1)$	$(z_e, \Box, 1)$
$\Box$	$(z_2, \Box, 1)$	$(z_3, \Box, -1)$	$(z_2, \Box, 1)$	$(z_4, \Box, 1)$	$(z_2, \Box, 1)$

	z_a	z_b	z'_a	z'_b	z_e
a	$(z_a, \mathtt{a}, 1)$	$(z_b, \mathtt{a}, 1)$	$(z_3, \mathtt{\#}, -1)$	$(f_1, \mathtt{a}, 0)$	$(f_1, \mathtt{a}, 0)$
b	$(z_a, \mathtt{b}, 1)$	$(z_b, \mathtt{b}, 1)$	$(f_1, \mathtt{b}, 0)$	$(z_3, \mathtt{\#}, -1)$	$(f_1, \mathtt{b}, 0)$
#	$(z'_a, \mathtt{\#}, 1)$	$(z'_b, \mathtt{\#}, 1)$	$(z'_a, \mathtt{\#}, 1)$	$(z'_b, \mathtt{\#}, 1)$	$(z_e, \Box, 1)$
$\Box$	$(z_2, \Box, 1)$	$(z_2, \Box, 1)$	$(f_1, \Box, 0)$	$(f_1, \Box, 0)$	$(f_2, \Box, 0)$

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen auf dem Band (von Blanksymbolen umgeben) ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}^*$ steht.

Der Kopf der Turingmaschine stehe auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}^*$.

Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Wörter $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{\#}\}^*$, für die gilt: T hält bei Eingabe von w im Zustand f_2.

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Menge aller Wörter w an, für die T bei Eingabe von w irgendwann hält.

Lösung: $(\mathtt{a} \mid \mathtt{b}) * \mathtt{\#}(\mathtt{a} \mid \mathtt{b})*$

b) Berechnen Sie die Endkonfiguration für die Eingabe $w =$ `aaab#baa`. Die Zwischenschritte der Berechnung müssen *nicht* angegeben werden.

Lösung: Auf dem Band steht das Wort `aab#baa`, der Kopf der Turingmaschine befindet sich im Zustand f_1 über dem `b` nach dem `#`.

c) Berechnen Sie die Endkonfiguration für die Eingabe $w =$ `abbaa#abba`. Die Zwischenschritte der Berechnung müssen *nicht* angegeben werden.

Lösung: Auf dem Band steht das Wort `#####`, der Kopf der Turingmaschine befindet sich im Zustand f_1 über dem Feld nach dem letzten `#`.

d) Geben Sie eine formale Beschreibung von $\mathcal{L}$ an, die nicht auf T verweist.

Lösung: $\{w\texttt{\#}w \mid w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\}$

e) Sei $w \in \mathcal{L}$ die Eingabe von T. Welches Wort $w' \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{\#}\}^*$ steht auf dem Band, wenn sich T im Zustand f_2 befindet?

Lösung: Das leere Wort ϵ.

f) Geben Sie eine möglichst einfache Funktion g an, so dass gilt:

Es gibt eine Funktion $f \in \Theta(g)$, so dass T bei Eingabe eines Wortes $w \in \mathcal{L}$ der Länge n genau $f(n)$ Schritte macht, bis T hält.

Lösung: $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n^2$.