Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
10. März 2009
mit Lösungsvorschlägen

Klausur-nummer			

Name:
Vornamen:
Matr.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	4	2	7	8	8	8	9
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:		Note:

Aufgabe 1 (1+1+1+1 = 4 Punkte)
In dieser Aufgabe geht um die formalen Sprachen

$$L_1 = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0\}$$
$$L_2 = \{\mathtt{b}^k\mathtt{a}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Geben Sie für jede der folgenden formalen Sprachen L je einen regulären Ausdruck R_L an mit $\langle R_L \rangle = L$.

a) $L = L_1 \cup L_2$
Lösungsvorschlag: `a*b*|b*a*`

b) $L = L_1 \cap L_2$
Lösungsvorschlag: `a*|b*`

c) $L = L_1 \cdot L_2$
Lösungsvorschlag: z. B. `a*b*b*a*` oder `a*b*a*`

d) $L = L_1^*$
Lösungsvorschlag: z. B. `(a*b*)*` oder `(a|b)*`

Name: Matr.-Nr.:

Aufgabe 2 (1+1 = 2 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um Speicher.

a) Welcher Speicher hat ein größeres Fassungsvermögen?

- Speicher A mit zwei Megabyte
- Speicher B mit zwei Mebibyte

Lösung: Speicher B

b) Die Hardwarerealisierung eines endlichen Automaten E muss mit sechs Byte Speicher für den aktuellen Zustand auskommen. Wieviele Zustände kann E höchstens haben?

Lösung: 2^{48}

Aufgabe 3 (3+3+1 = 7 Punkte)
Gegeben sei eine Menge M mit einer Halbordnung $\sqsubseteq$ darauf.

a) Ergänzen Sie die folgenden Zeilen zu den Definitionen der drei Bedingungen, die die Relation $\sqsubseteq$ erfüllen muss, damit sie eine Halbordnung ist:

- $\forall x \in M$:
- $\forall x \in M \;\; \forall y \in M$:
- $\forall x \in M \;\; \forall y \in M \;\; \forall z \in M$:

Lösung:

- $\forall x \in M : x \sqsubseteq x$
- $\forall x \in M \;\; \forall y \in M : \quad x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Longrightarrow x = y$
- $\forall x \in M \;\; \forall y \in M \;\; \forall z \in M : \quad x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Longrightarrow x \sqsubseteq z$

b) Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge von M, die größtes und kleinstes Element (bezüglich $\sqsubseteq$) besitzt. Das größte Element von T heiße g, das kleinste k.

Beweisen Sie: Wenn $g = k$ ist, dann enthält T nur ein Element.

Lösungsvorschlag:
Zeige: Wenn $g = k$, dann gilt für jedes Element $x \in T$: $x = k$.

- Sei $x \in T$ beliebig.
- Da k kleinstes Element von T ist, ist $k \sqsubseteq x$.
- Da g größtes Element von T ist, ist $x \sqsubseteq g$.
- Wegen $g = k$ ist, heißt das auch: $x \sqsubseteq k$.
- Aus $k \sqsubseteq x$ und $x \sqsubseteq k$ folgt mit der Antisymmetrie: $x = k$.

c) Geben Sie eine Menge M mit einer Halbordnung $\sqsubseteq$ an, so dass M zwei minimale Elemente besitzt, die gleichzeitig auch maximale Elemente von M sind.

Lösungsvorschlag:

- formal: $M = \{x, y\}$ und $\sqsubseteq = \{(x, x), (y, y)\}$
- oder Hassediagramm: zwei Punkte ohne Verbindung

Aufgabe 4 (2+3+3 = 8 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um endliche Akzeptoren mit Zustandsmenge $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ und Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$.

a) Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck für die Anzahl verschiedener endlicher Akzeptoren mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X an.

   Lösungsvorschlag: $4^{12} \cdot 2^4 \cdot 4$ oder 2^{30}

   Erklärung: Für jede der 12 Kombinationen von aktuellem Zustand und Eingabesymbol hat man jeweils 4 Möglichkeiten für den Nachfolgezustand. Es gibt 2^4 Möglichkeiten eine Teilmenge der Zustandsmenge als Menge akzeptierender Zustände auszuwählen. Und es gibt 4 mögliche Anfangszustände.

b) Beschreiben Sie mindestens eine Million (es dürfen auch mehr sein) verschiedene endliche Akzeptoren mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X, die alle die gleiche formale Sprache (welche, dürfen Sie sich aussuchen) akzeptieren.

   Lösungsvorschlag: zwei naheliegende Möglichkeiten:

   - alle endlichen Akzeptoren, die keinen akzeptierenden Zustand haben
   - alle endlichen Akzeptoren, bei denen alle Zustände akzeptierend sind

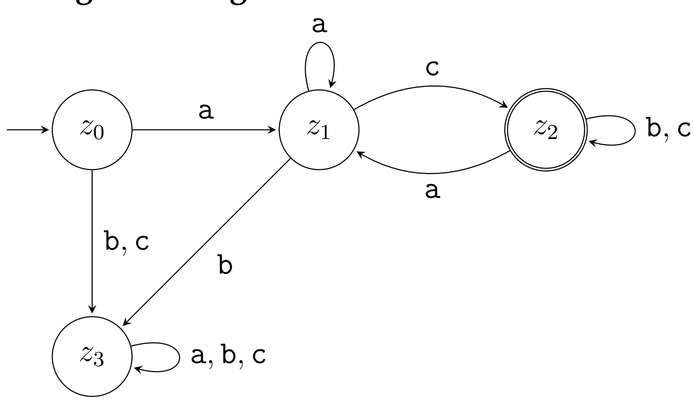
   In beiden Fällen handelt es sich um 4^{13} Automaten.

c) Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit der oben genannten Zustandsmenge Z und dem oben genannten Eingabealphabet X an, der genau die Wörter $w \in X^*$ akzeptiert, für die die folgenden drei Bedingungen gelten:

- w fängt mit einem `a` an.
- w hört *nicht* mit einem `a` auf.
- In w kommt nirgends das Teilwort `ab` vor.

Wenn Ihnen nur ein Akzeptor mit mehr als vier Zuständen einfällt, dann geben Sie diesen an. Für eine solche Lösung bekommen Sie nicht mehr alle Punkte, aber noch einige.

Lösungsvorschlag:



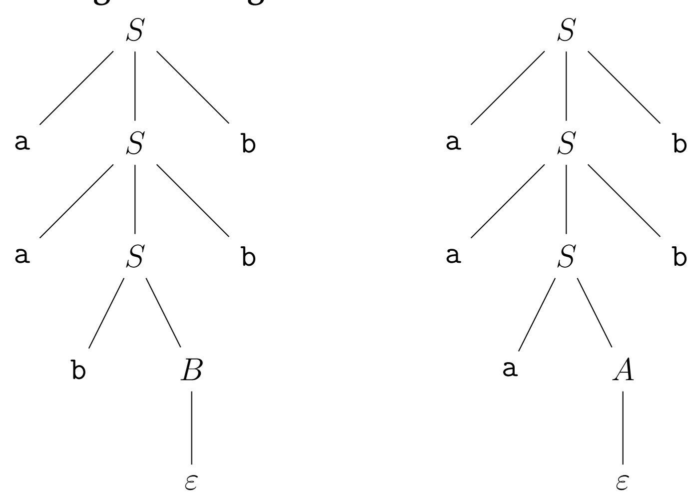
Aufgabe 5 (2+2+2+2 = 8 Punkte)

Gegeben sei die formale Sprache $L = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^m \mid k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge k \neq m\}$ über dem Alphabet $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $L(G) = L$ an.
Lösungsvorschlag: $G = (\{S, A, B\}, T, S, P)$ mit
$P = \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}B,\ \ A \to \mathtt{a}A \mid \varepsilon,\ \ B \to \mathtt{b}B \mid \varepsilon\}$

b) Zeichnen Sie für die Wörter aabbb und aaabb je einen Ableitungsbaum für Ihre Grammatik aus Teilaufgabe a).

Lösungsvorschlag:



c) Geben Sie eine Menge E von Wörtern an, die aus jeder Äquivalenzklasse der zu L gehörenden Nerode-Äquivalenz $\equiv_L$ genau ein Wort enthält.

Lösungsvorschlag: $E = \{\mathtt{a}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{a}^k\mathtt{b} \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{ba}\}$

d) Für $w \in T^*$ sei $M_w = \{w' \mid ww' \in L\}$.

Geben Sie für jedes $w \in T^*$ die Menge M_w konkret an. (Machen Sie eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Struktur von w).

Lösungsvorschlag: drei Hauptfälle:

- w hat die Form $w = \mathtt{a}^i$ mit $i \in \mathbb{N}_0$:
  Dann ist $M_w = \{\mathtt{a}^j\mathtt{b}^m \mid j, m \in \mathbb{N}_0 \wedge i + j \neq m\}$
- w hat die Form $w = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^i$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \mathbb{N}_+$:
  Dann ist $M_w = \{\mathtt{b}^j \mid j \in \mathbb{N}_0 \wedge k \neq i + j\}$
- In allen anderen Fällen ist $M_w = \{\}$.

Aufgabe 6 (1+3+1+3 = 8 Punkte)
Eine Zahlenfolge F_n sei wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}_0: \quad F_{n+2} &= 4F_{n+1} - 4F_n \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie F_6. Geben Sie bitte alle Zwischenschritte an.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} F_2 &= 4 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 8 & F_3 &= 4 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 24 \\ F_4 &= 4 \cdot 24 - 4 \cdot 8 = 64 & F_5 &= 4 \cdot 64 - 4 \cdot 24 = 160 \\ F_6 &= 4 \cdot 160 - 4 \cdot 64 = 384 \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Zahl F_n durch 2^n teilbar ist.

Lösungsvorschlag:

- Zu beweisende Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{Z} : F_n = k \cdot 2^n$$

- Induktionsanfang: $F_0 = 0 = 0 \cdot 2^0$ und $F_1 = 2 = 1 \cdot 2^1$.
- Induktionsannahme: $F_{n+1} = k_1 \cdot 2^{n+1}$ und $F_n = k_0 \cdot 2^n$
- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= 4F_{n+1} - 4F_n \\ &= 4(k_1 \cdot 2^{n+1}) - 4(k_0 \cdot 2^n) \\ &= 2k_1 \cdot 2^{n+2} - k_0 \cdot 2^{n+2} \\ &= (2k_1 - k_0) \cdot 2^{n+2} \end{aligned}$$

Mit k_0 und k_1 ist auch $2k_1 - k_0$ in $\mathbb{Z}$.

c) Geben Sie eine geschlossene Formel für die F_n an.

Hinweis: Sie können die Aussage aus Teilaufgabe b) nutzen, um auf eine Idee zu kommen.

Lösung: $F_n = n \cdot 2^n$

d) Beweisen Sie, dass Ihre Formel richtig ist.

Lösungsvorschlag:

- Zu beweisende Behauptung:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : F_n = n \cdot 2^n$$

- Induktionsanfang: $F_0 = 0 = 0 \cdot 2^0$ und $F_1 = 2 = 1 \cdot 2^1$.
- Induktionsannahme: $F_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1}$ und $F_n = n \cdot 2^n$
- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= 4F_{n+1} - 4F_n \\
&= 4((n+1) \cdot 2^{n+1}) - 4(n \cdot 2^n) \\
&= 4n2^n \cdot 2 + 2 \cdot 2^{n+2} - 4n2^n \\
&= n2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} \\
&= (n+2) \cdot 2^{n+2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (2+1+1+2+2+3 = 9 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_r', z_r, f\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\Box, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

$$\forall x \in \{\mathtt{b}, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$$

$$\begin{array}{lll}
(z_0, \mathtt{a}) \mapsto (z_1, \mathtt{b}, +1) & (z_0, x) \mapsto (z_0, x, +1) & (z_0, \Box) \mapsto (z_r', \mathtt{0}, -1) \\
(z_1, \mathtt{a}) \mapsto (z_0, \mathtt{a}, +1) & (z_1, x) \mapsto (z_1, x, +1) & (z_1, \Box) \mapsto (z_r', \mathtt{1}, -1) \\
 & & \\
(z_r', \mathtt{a}) \mapsto (z_r, \mathtt{a}, -1) & (z_r', x) \mapsto (z_r', x, -1) & (z_r', \Box) \mapsto (f, \Box, 0) \\
 & & \\
(z_r, \mathtt{a}) \mapsto (z_r, \mathtt{a}, -1) & (z_r, \mathtt{b}) \mapsto (z_r, \mathtt{b}, -1) & (z_r, \Box) \mapsto (z_0, \Box, +1)
\end{array}$$

Beachten Sie insbesondere die drei Fälle, in denen die Beschriftung eines Feldes geändert wird.

Die Turingmaschine wird im folgenden benutzt für Bandbeschriftungen, bei denen auf dem Band (von Blanksymbolen umgeben) ein Wort w steht, dessen vorderer Teil aus $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ stammt und der hintere Teil aus $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$, also $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$. Es sei $w \neq \varepsilon$.

Im folgenden bezeichne $n = N_\mathtt{a}(w)$ die Anzahl der $\mathtt{a}$ in dem nichtleeren Teil der anfänglichen Bandbeschriftung. Der Kopf der Turingmaschine stehe auf dem ersten Symbol von $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$.

a) In welchem Zustand in Abhängigkeit von n befindet sich die TM, wenn der Kopf zum ersten Mal über einem Zeichen $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ steht?

Lösungsvorschlag: Die Aufgabe ist leider ein kleines bisschen aufwändiger geraten als geplant.

- Wenn zu Beginn das letzte Symbol $\mathtt{0}$ oder $\mathtt{1}$ ist, dann ist der gesuchte Zustand
$$= \begin{cases} z_0 & \text{falls } N_\mathtt{a}(w) \text{ gerade ist} \\ z_1 & \text{falls } N_\mathtt{a}(w) \text{ ungerade ist} \end{cases}$$
- Wenn zu Beginn das letzte Symbol $\mathtt{a}$ oder $\mathtt{b}$ ist, dann ist der gesuchte Zustand
$$= \begin{cases} z_0 & \text{falls } \lfloor N_\mathtt{a}(w)/2 \rfloor \text{ gerade ist} \\ z_1 & \text{falls } \lfloor N_\mathtt{a}(w)/2 \rfloor \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

b) Es sei w' das Wort, das auf dem Band steht, wenn das nächste Mal der Kopf der TM auf dem ersten Nicht-Blanksymbol steht und die TM im Zustand z_0 ist.

Geben Sie $N_{\texttt{a}}(w')$ in Abhängigkeit von n an.

Lösung: $N_{\texttt{a}}(w') = \left\lfloor \frac{N_{\texttt{a}}(w)}{2} \right\rfloor$

c) Hält die TM für jede Eingabe $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$?

Lösung: Ja.

d) Geben Sie eine Funktion $f(n)$ an, so dass die Anzahl der Zeitpunkte, zu denen der Kopf der TM über dem ersten Nicht-Blanksymbol steht und die TM im Zustand z_0 ist, in $\Theta(f(n))$ ist.

Lösung: $f(n) = \log n$

e) Was steht am Ende genau auf dem Band, wenn die Eingabe am Anfang $w = \texttt{a}^n$ ist?

Lösung:

$\texttt{b}^n x$, wobei x das Spiegelbild der Dualzahldarstellung von n ist,
kurz: $\texttt{b}^n(\mathrm{Repr}_2(n))^R$