Lösungen zu den Faschingsaufgaben

Aufgabe 15

a) Eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, ist $\{\mathtt{a}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{a}^n\mathtt{b} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{ba}\}$.

b)
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : w = \mathtt{a}^n \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \{\mathtt{a}^k\mathtt{ba}^{n+k} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : w = \mathtt{a}^n\mathtt{b} \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \{\mathtt{a}^n\}$.
- $w = \mathtt{ba} \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \emptyset$.

c) Nein.

d) Da es unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Äquivalenz gibt, kann es keinen endlichen Akzeptor geben, der L erkennt, und damit kann es auch keine rechtslineare Grammatik geben, die L erzeugt.

Aufgabe 16

a) Sei $f(0) = f(1)$.

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) = f(0)$.

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für $n = 0$ nach Voraussetzung.

Induktionsannahme: Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $f(n) = f(0)$.

Induktionsschritt: Da $1F0$, also $f(1) = f(0)$ gilt, folgt mit der Verträglichkeit $(1+n)F(0+n)$ also $f(n+1) = f(n)$. Nach Induktionsannahme gilt somit auch $f(n+1) = f(0)$.

b) Sei $f(n) = f(0)$.

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\forall k \in \mathbb{N}_0 : f(kn) = f(0)$.

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt offensichtlich für $k = 0$.

Induktionsannahme: Für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f(kn) = 0$.

Induktionsschritt: Da $nF0$ gilt, folgt $(n+kn)F(0+kn)$, also $f((k+1)n) = f(kn)$. Nach Induktionsannahme gilt somit auch $f((k+1)n) = f(0)$.

c) Sei $f(n) = f(0)$. Nach Aufgabenteil b) gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0 : f(kn) = f(0)$.

Es folgt: $knF0 \Rightarrow (kn+m)F(0+m) \Rightarrow f(kn+m) = f(m)$.

d) **Achtung:** In der Aufgabenstellung war ein Fehler: Es muss zusätzlich als Voraussetzung gelten, dass es ein $n \in \mathbb{N}_+$ gibt, für das $f(n) = f(0)$ gilt (ansonsten ist die Aussage nicht korrekt).

Sei also $n \in \mathbb{N}_+$ so, dass $f(n) = f(0)$.

Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 > n_2$, also $n_1 - n_2 > 0$, und $f(n_1) = f(n_2)$.

Dann ist nach Teilaufgabe c) auch $f(nn_2 + n_1 - n_2) = f(n_1 - n_2)$. Die linke Seite ist gleich $f((n-1)n_2 + n_1)$.

Aus $f(n_1) = f(n_2)$ folgt mit Verträglichkeit $f((n-1)n_2+n_1) = f((n-1)n_2+n_2)$.

Also ist $f((n-1)n_2 + n_2) = f(n_1 - n_2)$.

Die linke Seite ist $f(nn_2)$ und da $f(n) = f(0)$ ist, auch $f(nn_2) = f(0)$. Also ist $f(n_1 - n_2) = f(0)$.

e) Sei $n \in \mathbb{N}^+$ die kleinste Zahl größer als 0, für die gilt: $f(n) = f(0)$.

Dann gilt nach Aufgabenteil c): $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0 : [\exists k \in \mathbb{N}_0 : |n_1 - n_2| = kn] \Rightarrow f(n_1) = f(n_2)$.

Seien nun $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n_1) = f(n_2)$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n_1 > n_2$.

Sei $k = \lfloor \frac{n_1 - n_2}{n} \rfloor$. Dann ist $kn \leq n_1 - n_2 < (k+1)n$.

Es gibt also $m \in \mathbb{N}_0 : m < n$ und $kn + m = n_1 - n_2$.

Nach Teilaufgabe d) gilt $(n_1 - n_2)F0$

Es folgt mit Teilaufgabe c): $0F(n_1 - n_2)F(kn + m)Fm \Rightarrow f(m) = f(0)$.

Falls $m > 0$, wäre dies ein Widerspruch zur Minimalität von n. Also muss $m = 0$ gelten und es gilt $n_1 - n_2 = kn$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(**Achtung:** Wie oben befand sich in der Aufgabenstellung ein Fehler: Es muss in der Voraussetzung gelten, dass es ein $n \in \mathbb{N}^+$ gibt, für das $f(n) = f(0)$ gilt, ansonsten ist die Aussage nicht korrekt.)

Aufgabe 17

a) Induktionsanfang: $S \Rightarrow^0 w \Rightarrow w = S$ und es gilt $w = \epsilon S \epsilon$.

Induktionsannahme: Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$S \Rightarrow^n w \Rightarrow w \in T^* \vee \exists Y \in N \exists w_1, w_2 \in T^* : w = w_1 Y w_2 \wedge |w_1| = |w_2|$.

Induktionsschritt: Sei $S \Rightarrow^{n+1} w$ und $w \notin T^*$.

Dann gibt es $w' \notin T^*$ mit $S \Rightarrow^n w' \Rightarrow w$.

Nach Induktionsannahme gibt es ein $Y' \in N$ und Wörter $w_1', w_2' \in T^*$ mit $w' = w_1' Y' w_2'$ und $|w_1'| = |w_2'|$.

Dann muss im letzten Schritt Y' durch ein Wort v ersetzt worden sein mit $Y' \to v \in P$ und $v \notin T^*$.

Somit muss es $v_1, v_2 \in T^*$ und ein $Y \in N$ geben, so dass $v = v_1 Y v_2$ und $|v_1| = |v_2|$ gilt (wegen der Forderung an die Produktionenmenge).

Wir erhalten $w = w_1' v_1 Y v_2 w_2'$, und es gilt $|w_1' v_1| = |w_1'| + |v_1| = |v_2| + |w_2'| = |v_2 w_2'|$ und $w_1' v_1, v_2 w_2' \in T^*$.

Setzt man $w_1 = w_1' v_1$ und $w_2 = v_2 w_2'$, hat man die Behauptung gezeigt.

b) Nach jedem Schritt einer Ableitung aus S gibt es höchstens ein Nichtterminalsymbol; falls es eines gibt, steht dieses in der Mitte des Wortes.

Aufgabe 18

a) $\mathtt{a}^{n-m}\mathtt{b}^m$.

b) $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{m-n}$.

c) $\mathtt{b}^n$ (oder $\mathtt{b}^m$).

d) Wir benutzen die obigen Ergebniss und betrachten immer die Konfiguration $\mathtt{a}^{n_i}\mathtt{b}^{m_i}$ nachdem das i-te Mal der Zustand von z_2 zu z_0 oder von z_4 zu z_0 überging.

	(3, 4)	(8, 5)	(9, 12)	(12, 9)	(12, 8)
1	(3, 1)	(3, 5)	(9, 3)	(3, 9)	(4, 8)
2	(2, 1)	(3, 2)	(6, 3)	(3, 6)	(4, 4)
3	(1, 1)	(1, 2)	(3, 3)	(3, 3)	$\mathbf{b^4}$
4	$\mathbf{b^1}$	(1, 1)	$\mathbf{b^3}$	$\mathbf{b^3}$	
5		$\mathbf{b^1}$			

e) Am Ende steht das Wort $\mathtt{b}^{ggT(n,m)}$, wobei $ggT(n,m)$ der größte gemeinsame Teiler von n und m ist.

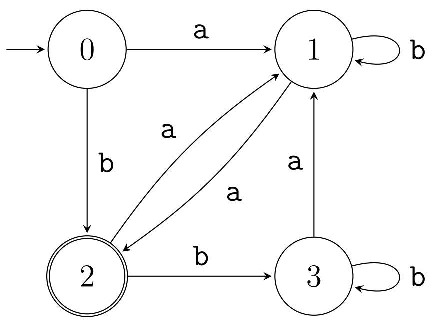
Aufgabe 19

1. `((a|b)(a|b))*`

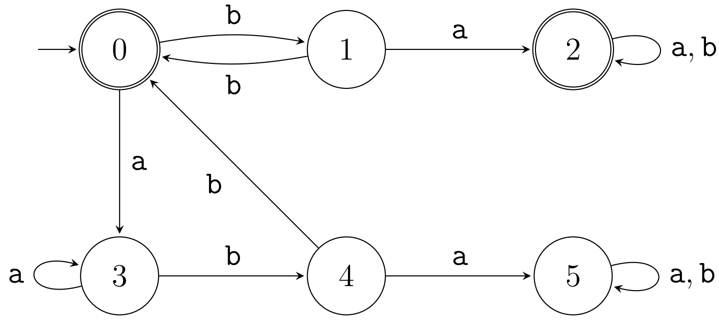
2. `(a(a|b)*a)|a`
3. `a((a|b)(a|b))*b`
4. `(a|b)*a(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)`
5. `(a|b)*aba(a|b)*`
6. `b*a*b*(bba*b*)*`
7. `(ab|ba)*(∅*|a|b)`

Aufgabe 20

a)



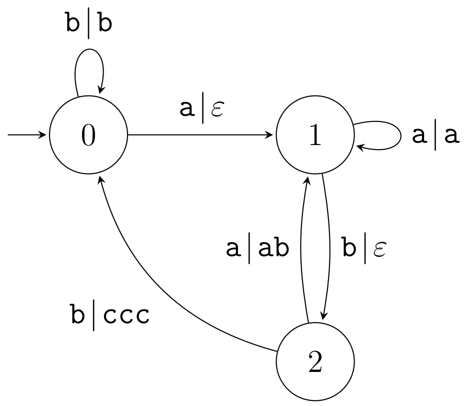
b)



Aufgabe 21

`((a(ac)*b|b)a)*(a(ac)*b|b)(b|c)`

Aufgabe 22



Man beachte, dass dieser Automat versagt, wenn die Eingabe mit `a` oder `ab` endet. Da der Automat nicht „weiß“, wenn die Eingabe zu Ende ist, kann er die letzten Symbole auch nicht ausgeben.

Aufgabe 23

Da $g \in T$ gilt $g \sqsubseteq s$, da s eine obere Schranke von T ist.
Da g größtes Element in T ist, gilt $\forall x \in T : x \sqsubseteq g$, und damit ist g eine obere Schranke von T.
Da s die *kleinste* obere Schranke von T ist, folgt $s \sqsubseteq g$.
Insgesamt ergibt sich also $s \sqsubseteq g$ und $g \sqsubseteq s \Rightarrow g = s$.