Musterlösung zum Übungsblatt 3 der Vorlesung " Grundbegriffe der Informatik"

Aufgabe 3.1

a)

$$
\begin{array}{l}
p \leftarrow 0 \\
\underline{\text{for}}\ i \leftarrow 0\ \underline{\text{to}}\ n-2\ \underline{\text{do}} \\
\quad p \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } w(i) = \mathrm{x} \wedge w(i+1) = \mathrm{y} \\ p & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}
$$

Alternativ:

$$
\begin{array}{l}
p \leftarrow 0 \\
v \leftarrow \begin{cases} \epsilon & \text{falls } n = 0 \\ w(0) & \text{falls } n \geq 1 \end{cases} \\
\underline{\text{for}}\ i \leftarrow 0\ \underline{\text{to}}\ n-2\ \underline{\text{do}} \\
\quad p \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } w(i) = \mathrm{x} \wedge w(i+1) = \mathrm{y} \\ p & \text{sonst} \end{cases} \\
\quad v \leftarrow v \cdot w(i+1)
\end{array}
$$

b) $\exists i \in \mathbb{G}_{n-1} : w(i) = \mathrm{x} \wedge w(i+1) = \mathrm{y}$

c) Schleifeninvariante: $p = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists j \in \mathbb{G}_i : w(j) = \mathrm{x} \wedge w(j+1) = \mathrm{y} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Schleifeninvariante für die Alternative:

$p = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ nacheinander x und y enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Vorteil der Alternative: Schleifenvariable i kommt nicht vor.

Aufgabe 3.2

a) $P_n = b^a$

b) $\mathcal{A}_i : P_i \cdot Y_i^{X_i} = b^a$

c) **Induktionsanfang:** $i = 0$:

$P_0 \cdot Y_0^{X_0} = 1 \cdot b^a = b^a$

Induktionsannahme: Für ein festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $P_i \cdot Y_i^{X_i} = b^a$.

Induktionsschritt: Wenn $\mathcal{A}_i$ gilt, gilt auch $\mathcal{A}_{i+1}$.

Beweis: $P_{i+1} \cdot Y_{i+1}^{X_{i+1}} = (P_i \cdot Y_i^{x_i}) \cdot (Y_i^2)^{(X_i \textbf{ div } 2)} = P_i \cdot Y_i^{x_i + 2(X_i \textbf{ div } 2)}$
$= P_i \cdot Y_i^{X_i \textbf{ mod } 2 + 2(X_i \textbf{ div } 2)} = P_i \cdot Y_i^{X_i}$

Nach Induktionsannahme gilt $P_i \cdot Y_i^{X_i} = b^a$, und damit folgt $P_{i+1} \cdot Y_{i+1}^{X_{i+1}} = b^a$.

d) Das Ergebnis bleibt gleich:

1. Fall: a ist eine Zweierpotenz. Dann ist $\lfloor \log_2 a \rfloor = \lceil \log_2 a \rceil$ und die Anzahl der Schleifendurchläufe bleibt gleich.

2. Fall: a ist keine Zweierpotenz. Da X_i in jedem Schleifendurchlauf halbiert wird, erhalten wir $\forall i \in \mathbb{N}_0 : X_i \leq a \textbf{ div } 2^i$.

Da $2^{\lceil \log_2 a \rceil} > a$ gilt $X_{n-1} = X_{\lceil \log_2 a \rceil} \leq a \textbf{ div } 2^{\lceil \log_2 a \rceil} < 1$ und somit $X_{n-1} = 0$ und $x_{n-1} = 0$.

In der letzten Schleife wird P_{n-1} also mit $Y_i^0 = 1$ multipliziert um P_n zu erhalten, was das Ergebnis nicht verändert. Somit wurde das Ergebnis bereits nach $\lceil \log_2 a \rceil$ Schleifendurchläufen berechnet.

Da in diesem Fall $\lceil \log_2 a \rceil = \lfloor \log_2 a \rfloor + 1$ gilt, folgt die Behauptung.