Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe

Fakultät für Informatik

SS 2008

Prof. Dr. P. H. Schmitt

8. Oktober 2008

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (12)	A2 (6)	A3 (3)	A4 (6)	A5 (10)	A6 (6)	A7 (7)	A8 (4)	A9 (6)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der erreichbaren 60 Punkte hinreichend.

Bonus: ______ **Gesamtpunkte:**

1 Zur Einstimmung (12 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)“, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- p, q, r, s und t sind Prädikatensymbole, c ein Konstantensymbol, x, y und z sind Variablen.

a.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemeingültig	unerfüllbar
$\forall x \neg \exists y (p(x,y)) \land \exists z (p(z,c))$				**X**
$\forall x \big(q(x) \doteq r(x)\big) \to \big(q(c) \to r(c)\big)$	**X**			
$\forall x \exists y \big(p(x,y) \to p(x,c)\big)$		**X**	**X**	
$(s \to t) \to s$		**X**		

b.

	Richtig	Falsch
Zu jeder prädikatenlogischen Formel A_p gibt es eine aussagenlogische Formel A_a, die genau dann allgemeingültig ist, wenn A_p allgemeingültig ist.	**X**	
Jeder Büchi-Automat, in dem jeder Zustand Endzustand ist, akzeptiert jedes omega-Wort über seinem Alphabet.		**X**
Für jede modallogische Formel A ist die Formel $\Box A \to \Diamond A$ allgemeingültig.		**X**
Die OCL-Operation `collect` kann durch einen geeigneten `iterate`-Ausdruck ersetzt werden, der dieselbe Bedeutung besitzt.	**X**	
Der Davis-Putnam-Loveland-Algorithmus (DPL) terminiert für jede Eingabe.	**X**	

c. Sind folgende LTL-Formeln allgemeingültig, d.h. gelten sie in allen omega-Strukturen?

LTL-Formel	Ja	Nein
$\big(p \land \Box(p \to \mathbf{X}p)\big) \to \Box p$	**X**	
$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$	**X**	
$\Box(p \lor q) \to (p \,\mathbf{U}\, q)$		**X**

2 Formalisierung in Prädikatenlogik (6 Punkte)

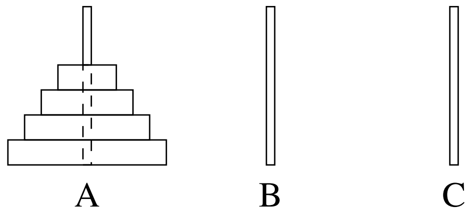


Abbildung 1: Ausgangssituation

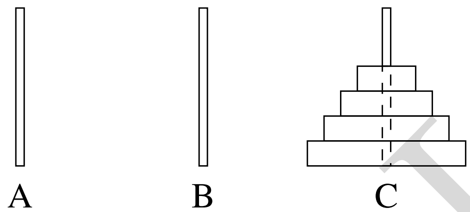


Abbildung 2: Endsituation

Das Spiel *die Türme von Hanoi* besteht aus d (in der Abbildung $d = 4$) Scheiben $S_1 \ldots, S_d$, wobei Scheibe S_j den Durchmesser j cm hat. Die Aufgabe besteht darin, die Scheiben aus der Anfangssituation Abb. 1 in die Endsituation Abb. 2 zu bringen, indem jeweils eine oberste Scheibe von einem der drei Stapel weggenommen wird und auf einen anderen Stapel aufgelegt wird. In jeder Zwischensituation darf dabei nie eine größere Scheibe auf einer kleineren zu liegen kommen.

Zur Beschreibung der Situationen benutzen wir die Prädikate on_A, on_B, on_C und $smaller$. Wir betrachten nur Interpretationen $\mathcal{M}$, deren Universum die Menge $\{1, 2, \ldots, d\}$ ist. Das Prädikat $smaller(x, y)$ wird darin zu wahr interpretiert, genau dann wenn die Interpretation von x echt kleiner als die Interpretation von y ist. Die Prädikate $on_A(x)$, $on_B(x)$ und $on_C(x)$ beschreiben, dass eine Scheibe x auf Stapel A, B bzw. C liegt. Die Scheiben liegen dabei nach der Größe sortiert auf den Stapeln.

Geben Sie für die folgenden Aufgabenteile je eine Formel in Prädikatenlogik erster Stufe an, die diese Prädikate benutzt.

a. Das Spiel befindet sich in der Ausgangssituation.

$\forall x\big(on_A(x) \land \neg on_B(x) \land \neg on_C(x)\big)$

b. Die durch die freie Variable x repräsentierte Scheibe ist die oberste (d.h. kleinste) Scheibe auf Stapel B.

$on_B(x) \land \forall y\big(on_B(y) \land \neg x \doteq y \to smaller(x, y)\big) \qquad =: top_B(x)$

c. Die oberste Scheibe von Stapel B darf auf Stapel C bewegt werden.

$\exists x\big(on_B(x) \land \forall y(on_C(y) \to smaller(x, y))\big)$
$\forall x \forall y(top_B(x) \land top_C(y) \to smaller(x, y))$

3 Unifikation (1+1+1 Punkte)

Es sind hier f ein zweistelliges, g ein einstelliges und c ein nullstelliges Funktionssymbol; p ein zweistelliges, r ein einstelliges Prädikatensymbol, und x, y, z Variablen.

Geben Sie für die folgenden Termpaare einen **allgemeinsten Unifikator** an. Begründen Sie, falls es keinen allgemeinsten Unifikator gibt.

a. $g\Big(x, f\big(f(x,y)\big)\Big)$
$g\Big(g(z), f\big(f(g(c),z)\big)\Big)$

$$\mu_a = \{x/g(c), y/c, z/c\}$$

angewendet: $g(g(c), f(f(g(c), c)))$

b. $f\Big(f(y,x), x\Big)$
$f\Big(f\big(g(z), f(g(z),c)\big), f(y,c)\Big)$

$$\mu_b = \{x/f(g(z),c), y/g(z)\}$$

angewendet: $f\Big(f(g(z), f(g(z),c)), f(g(z),c)\Big)$

c. Ist σ eine eine **kollisionsfreie Substitution** für F? Geben Sie $\sigma(F)$ an, falls ja; geben Sie andernfalls an, wo eine Kollision auftritt.

$$\sigma = \{x/g(y), z/g(x)\}$$
$$F = p(x,y) \to \exists y\Big(r\big(f(y,z)\big) \wedge \forall x\big(r(f(x,y))\big)\Big)$$

Kollisionsfrei!

$$\sigma(F) = p(g(y),y) \to \exists y(r(f(y,g(x))) \wedge \forall x(r(f(x,y))))$$

4 Hornformeln / Klauselnormalform (4+2 Punkte)

a. Zeigen Sie mithilfe des **Markierungsalgorithmus für Hornformeln** die Unerfüllbarkeit der aussagenlogischen Formel

$$(R \lor \neg Q \lor \neg P) \land (\neg S \lor \neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg T \lor \neg P) \land S \land (P \lor \neg S) \land (\neg P \lor \neg Q \lor \neg R)$$

Geben Sie dabei an, in welcher Reihenfolge die Atome markiert werden und begründen Sie Ihre Markierungsschritte.

i. S ist Faktum

$$(R \lor \neg Q \lor \neg P) \land (\neg \boxed{S} \lor \neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg T \neg P) \land \boxed{S} \land (P \lor \neg \boxed{S}) \land (\neg P \lor \neg Q \lor \neg R)$$

ii. P steht alleine unmarkiert in einer Klausel

$$(R \lor \neg Q \lor \neg \boxed{P}) \land (\neg \boxed{S} \lor \neg \boxed{P} \lor Q) \land (\neg R \lor \neg T \neg \boxed{P}) \land \boxed{S} \land (\boxed{P} \lor \neg \boxed{S}) \land (\neg \boxed{P} \lor \neg Q \lor \neg R)$$

iii. Q steht alleine unmarkiert in einer Klausel

$$(R \lor \neg \boxed{Q} \lor \neg \boxed{P}) \land (\neg \boxed{S} \lor \neg \boxed{P} \lor \boxed{Q}) \land (\neg R \lor \neg T \neg \boxed{P}) \land \boxed{S} \land (\boxed{P} \lor \neg \boxed{S}) \land (\neg \boxed{P} \lor \neg \boxed{Q} \lor \neg R)$$

iv. R steht alleine unmarkiert in einer Klausel

$$(\boxed{R} \lor \neg \boxed{Q} \lor \neg \boxed{P}) \land (\neg \boxed{S} \lor \neg \boxed{P} \lor \boxed{Q}) \land (\neg \boxed{R} \lor \neg T \neg \boxed{P}) \land \boxed{S} \land (\boxed{P} \lor \neg \boxed{S}) \land (\neg \boxed{P} \lor \neg \boxed{Q} \lor \neg \boxed{R})$$

v. In der letzten Klausel sind alle Variablen markiert, aber die Horn-Klausel enthält keinen Kopf. Daher ist sie nicht erfüllt. $\Longrightarrow$ Formel ist unerfüllbar.

b. Transformieren Sie die Formel

$$\neg\Big((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to c)\Big)$$

in Klauselnormalform. Geben Sie eine erfüllende Belegung an, wenn sie erfüllbar ist. Begründen Sie, wenn sie nicht erfüllbar ist.

$$(\neg a \lor \neg b \lor c) \;\land\; (\neg a \lor b) \;\land\; \neg c$$

Dies ist offensichtlich erfüllbar, z.B. indem man alle Variablen auf F setzt.

5 Tableau (10 Punkte)

Vervollständigen Sie folgendes angefangene Tableau zu einem geschlossenen Tableau.

Hinweis: Es ist sinnvoll, das erste Mal, wenn Sie eine gamma-Regel anwenden, dafür (2) zu benutzen.

$$1\,\forall x \forall y \forall z (p(x,y) \land p(y,z) \to p(x,z)) \ (1)$$
$$|$$
$$1\,\forall x (a(x) \to \exists y (p(x,y) \land b(y))) \ (2)$$
$$|$$
$$0\,\forall x (\exists y (p(x,y) \land a(y)) \to \exists y (p(x,y) \land b(y))) \ (3)$$
$$|$$

$0\,\exists y(p(c,y) \land a(y)) \to \exists y(p(c,y) \land b(y))$ (4)[3,δ]

$1\,\exists y(p(c,y) \land a(y))$ (5)[4,β]

$0\,\exists y(p(c,y) \land b(y))$ (6)[4,β]

$1\,p(c,d) \land a(d)$ (7)[5,δ]

$1\,p(c,d)$ (8)[7,α]

$1\,a(d)$ (9)[7,α]

$1\,a(X) \to \exists y(p(X,y) \land b(y))$ (10)[2,γ]

Linker Ast:

$0\,a(X)$ (11)[10,β]
Abschluss mit [9], [11]
$\sigma = \{X/d\}$

Rechter Ast:

$1\,\exists y(p(X,y) \land b(y))$ (12)[10,β]

$1\,p(d,e) \land b(e)$ (13)[12,δ]

$1\,p(d,e)$ (14)[13,α]

$1\,b(e)$ (15)[13,α]

$0\,p(c,Y) \land b(Y)$ (16)[6,γ]

$0\,p(c,Y)$ (17)[16,β]

$1\,p(X_1,Y_1) \land p(Y_1,Z_1) \to p(X_1,Z_1)$ (19)[1,3×γ]

$0\,p(X_1,Y_1) \land p(Y_1,Z_1)$ (20)[19,β]

$0\,p(c,Y_1)$ (22)[20,β]
Abschluss mit [25],[8]
$\sigma = \{Y_1/d\}$

$0\,p(Y_1,e)$ (23)[20, β]
Abschluss mit [26],[14]

$1\,p(X_1,Z_1)$ (21)[19,β]
Abschluss mit [21],[17]
$\sigma = \{X_1/c, Z_1/e\}$

$0\,b(Y)$ (18)[16,β]
Abschluss mit [18],[15]
$\sigma = \{Y/e\}$

6 LTL-Tautologie (6 Punkte)

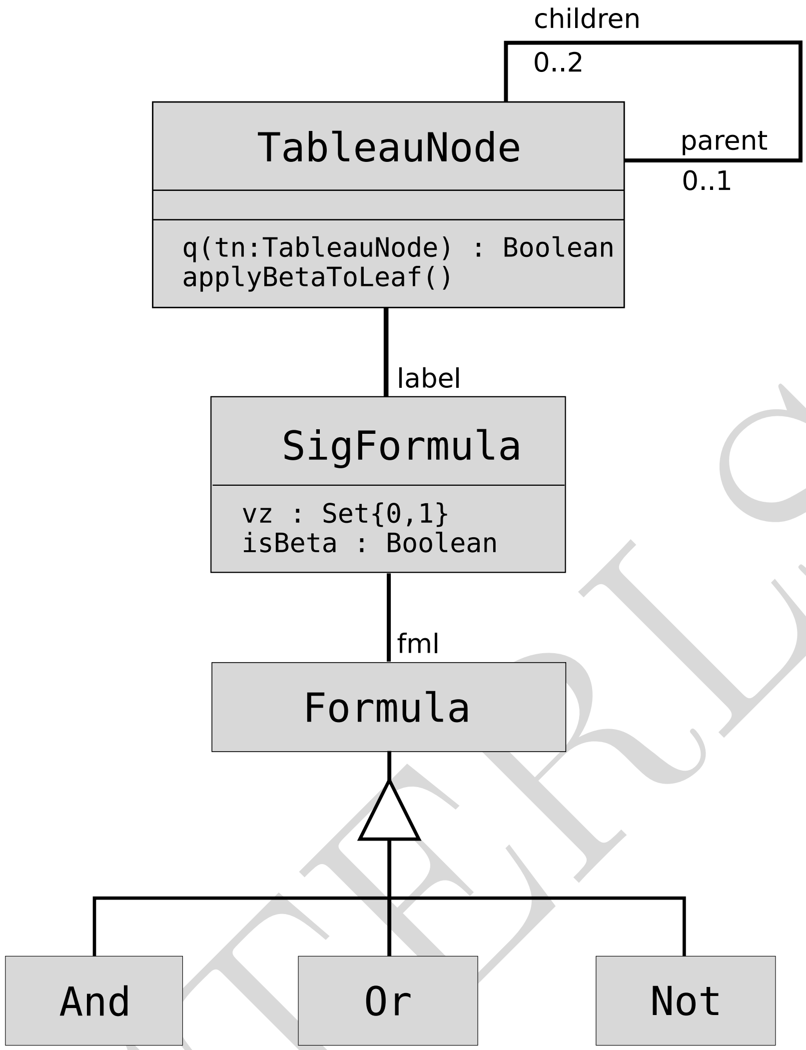
Beweisen Sie, dass die LTL-Formel

$$\big((\Box A)\,\mathbf{U}\,B\big) \;\leftrightarrow\; \big(B \vee (\Box A \wedge \Diamond B)\big)$$

eine Tautologie ist.

Sei $(\mathbb{N}, \leq, \xi)$ eine beliebige omega-Struktur. Dann gilt:

$\xi \models (\Box A)\,\mathbf{U}\,B$ gdw
es gibt $n \geq 0$ mit $\xi_n \models B$ und für alle $i, 0 \leq i < n$ gilt $\xi_i \models \Box A$
gdw
$\xi \models B$ oder es gibt $n > 0$ mit $\xi_n \models B$ und
für alle $i, 0 \leq i < n$ gilt $\xi_i \models \Box A$
gdw
$\xi \models B$ oder es gibt $n > 0$ mit $\xi_n \models B$ und $\xi_0 \models \Box A$
gdw
$\xi \models B$ oder es gibt $n \geq 0$ mit $\xi_n \models B$ und $\xi_0 \models \Box A$
gdw
$\xi \models B \vee (\Diamond B \wedge \Box A)$



Lösung zu Aufgabenteil 7b:

```
     context TableauNode::applyBetaToLeaf()
     pre: self.label.isBeta and self.children.isEmpty()
oder pre: self.label.isBeta and self.children.size() = 0
     post: self.children.label->forAll(x | x.vz = self.label.vz)
```

7 OCL (3+2+2 Punkte)

Auf der linken Seite (auf der Rückseite zu Aufgabe 6) finden Sie ein UML-Diagramm, das ein Metamodell für aussagenlogische Tableaus beschreibt.

Dazu gibt es die Klasse `TableauNode`, die einen Knoten im Tableau beschreibt. Das Assoziationsende `children` beschreibt die direkten Nachfolgerknoten, `parent` den direkten Elternknoten.

Jeder Knoten hat eine Vorzeichenformel (der Klasse `SigFormula`) zugeordnet, diese wiederum bezieht sich auf genau eine Formel (`Formula`). Es gibt 3 verschiedene Arten von Formeln: Konjunktionen (`And`), Disjunktionen (`Or`) und Negationen (`Not`).

a. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, was folgender OCL-Vertrag über die Methode `q` aussagt:

```
context TableauNode::q(tn: TableauNode) : Boolean
pre:  true
post: result = TableauNode.allInstances->iterate(x; s:Set(TableauNode) = Set{self} |
                    s->union(s.parent))->includes(tn)
```

Die Methode berechnet, ob der als Parameter übergebene Knoten `tn` im Tableau ein Vorfahre des self-Knotens ist.

Lösung zu b. siehe links

b. Vervollständigen Sie den folgenden Vertrag für die Methode `applyBetaToLeaf`.
Vorbedingung: Die Methode darf nur auf einer Beta-Formel, die ein Blatt im Tableau sein muss, aufgerufen werden (1)
Nachbedingung: Die Labels in allen direkten Nachfolgerknoten haben das selbe Vorzeichen wie das Label des Knotens, auf dem Aufruf statt fand (2).

```
context TableauNode::applyBetaToLeaf()

pre:  self.label.isBeta and ___________________________________ (1)

post: _________________________________________________________ (2)
```

c. Geben Sie eine Invariante für die Klasse `SigFormula` an, die besagt, dass eine Vorzeichenformel genau dann eine Beta-Formel ist (Attribut `isBeta` wahr), wenn das Vorzeichen 1 und Formel `fml` eine OR-Formel ist oder wenn das Vorzeichen 0 und die Formel `fml` eine AND-Formel ist.

Hinweis: Benutzen Sie das Konstrukt *ausdruck*.`oclIsKindOf(`*Typ*`)`.

```
context SigFormula
inv: self.isBeta = ((self.vz = 1 and self.fml.oclIsKindOf(Or))
     or (self.vz = 0 and self.fml.oclIsKindOf(And)))
```

8 Übersetzung von Modal- nach Prädikatenlogik (3+1 Punkte)

Sei (S, R, I) eine Kripkestruktur über $\Sigma = \{A\}$.
In der prädikatenlogische Interpretation (S, J) sei das Universum die Menge der Kripkewelten. Das zweistellige Prädikat r beschreibe die Zugänglichkeitsrelation R und das einstellige Prädikat a die Gültigkeit von A in einer Kripkewelt.

Formal ausgedrückt: $I(r) = R$ und $J(a)(s) = I(a, s)$ für alle $s \in S$

a. Geben Sie für die Formel

$$\varphi = \Box A \to \Box\Box A$$

eine prädikatenlogische Formel ψ an, so dass $(S, R, I) \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $(S, J) \models \psi$

$$\forall x\big((\forall y(r(x,y) \to a(y))) \to (\forall y \forall z(r(x,y) \land r(y,z) \to a(z)))\big)$$

b. Welche Klasse von Kripkerahmen wird durch φ charakterisiert?

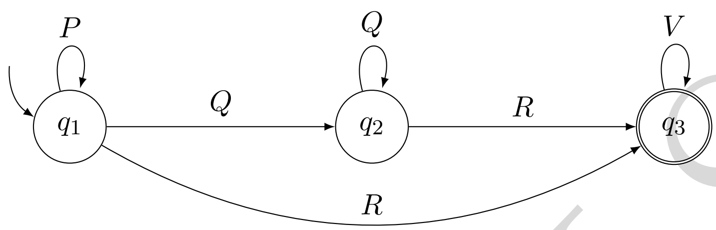
Die Klasse der transitiven Kripkerahmen

9 Büchi-Automaten / LTL (3+3 Punkte)

a. Geben Sie für die folgende LTL-Formel einen akzeptierenden Büchi-Automaten an.

$$p\,\mathbf{U}\,(q\,\mathbf{U}\,r)$$

p, q und r sind dabei aussagenlogische Atome.



wobei mit P, Q, R, V die üblichen Mengen bezeichnet sind, wie sie in der Vorlesung eingeführt wurden.

b. Geben Sie eine LTL-Formel über $\Sigma = \{p\}$ an, die genau in denjenigen omega-Strukturen $(\mathbb{N}_0, \leq, \xi)$ gilt, in denen

$$p \in \xi(i) \text{ gdw. } i = 2$$

gilt.

$$\mathbf{XX}p \wedge \neg p \wedge \neg\mathbf{X}p \wedge \mathbf{XXX}\Box\neg p$$

$$\neg p \wedge \mathbf{X}(\neg p \wedge \mathbf{X}(p \wedge \mathbf{X}\Box\neg p))$$