Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

SS 1999/2000

Prof. Dr. P. H. Schmitt

16. März 2000

Name: ________________________

Vorname: ________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (4)	A2 (6)	A3 (10)	A4 (6)	A5 (10)	A6 (8)	A7 (6)	A8 (10)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen !!!

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der erreichbaren 60 Punkte.

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (2 + 2 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden insgesamt jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Aufgabe vergeben.)

Hinweis: „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Ordnung (mit Gleichheit)“; auf diese beziehen sich auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben.

a.

	keine Formel der PL1	erfüllbar	allgemeingültig	unerfüllbar
$\forall x \exists n (p(x_1) \wedge \ldots \wedge p(x_n))$	$\times$			
$\exists y \forall x (p(x,y)) \to \forall x \exists y (p(x,y))$		$\times$	$\times$	
$\forall x \exists y (p(x,y)) \to \exists y \forall x (p(x,y))$		$\times$		
$\neg \exists x (p(x) \vee \neg p(x))$				$\times$

b.

	richtig	falsch
Jede erfüllbare PL1-Formel ist allgemeingültig.		$\times$
Jede allgemeingültige PL1-Formel ist erfüllbar.	$\times$	
Wenn eine PL1-Formel erfüllbar ist, dann ist ihr Negat unerfüllbar.		$\times$
Wenn eine PL1-Formel unerfüllbar ist, dann ist ihr Negat allgemeingültig.	$\times$	

2 Semantik der Prädikatenlogik (6 Punkte)

Zeigen Sie:

> Enthält jede Klausel einer Klauselmenge K ein oder mehr negative Literale, dann hat K ein Modell.

Hinweis: Ein Literal ist entweder von der Form A oder von der Form $\neg A$, wobei A eine atomare Formel ist. Ein Literal ist negativ, wenn es von der Form $\neg A$ ist.

Lösung:

Sei (D, I) eine prädikatenlogische Interpretation mit

$$I(p) = \emptyset$$

für alle Prädikatensymbole p.
In dieser Interpretation sind alle Atome falsch, und daher alle negativen Literale wahr. Da in jeder der Klauseln in K ein negatives Literal vorkommt, ist also jeder dieser Klauseln in (D, I) wahr.
Daraus, daß jede Klausel in K in (D, I) wahr ist, folgt schließlich, daß (D, I) ein Modell von K ist.

3 Formalisierung und Tableaukalkül (2 + 8 Punkte)

a. Geben Sie eine prädikatenlogische Formel F an, die den folgenden mengentheoretischen Satz formalisiert:

Aus $p \cap q = \emptyset$ und $r \cap s = \emptyset$ folgt $(p \cap r) \cap (q \cup s) = \emptyset$.

Hinweis: Verwenden sie einstellige Prädikatensymbole p, q, r und s, um die gleichnamigen Mengen darzustellen.

Lösung:

$$[\neg\exists x(p(x) \land q(x)) \land \neg\exists x(r(x) \land s(x))] \;\rightarrow\; \neg\exists x((p(x) \land r(x)) \land (q(x) \lor s(x)))$$

b. Zeigen Sie mit Hilfe des Tableaukalküls, daß die Formel F aus Teilaufgabe a. allgemeingültig ist.

Lösung:

(1;–) $\mathbf{0}\; [\neg\exists x(p(x) \land q(x)) \land \neg\exists x(r(x) \land s(x))] \;\rightarrow\; \neg\exists x((p(x) \land r(x)) \land (q(x) \lor s(x)))$

(2;1) $\mathbf{1}\; \neg\exists x(p(x) \land q(x)) \land \neg\exists x(r(x) \land s(x))$

(3;1) $\mathbf{0}\; \neg\exists x((p(x) \land r(x)) \land (q(x) \lor s(x)))$

(4;2) $\mathbf{1}\; \neg\exists x(p(x) \land q(x))$

(5;2) $\mathbf{1}\; \neg\exists x(r(x) \land s(x))$

(6;4) $\mathbf{0}\; \exists x(p(x) \land q(x))$

(7;5) $\mathbf{0}\; \exists x(r(x) \land s(x))$

(8;6) $\mathbf{0}\; p(x_1) \land q(x_1)$

(9;7) $\mathbf{0}\; r(x_2) \land s(x_2)$

(10;3) $\mathbf{1}\; \exists x((p(x) \land r(x)) \land (q(x) \lor s(x)))$

(11;10) $\mathbf{1}\; (p(c) \land r(c)) \land (q(c) \lor s(c))$

(12;11) $\mathbf{1}\; p(c) \land r(c)$

(13;11) $\mathbf{1}\; q(c) \lor s(c)$

(14;12) $\mathbf{1}\; p(c)$

(15;12) $\mathbf{1}\; r(c)$

(16;13) $\mathbf{1}\; q(c)$ (17;13) $\mathbf{1}\; s(c)$

(18;8) $\mathbf{0}\; p(x_1)$ (19;8) $\mathbf{0}\; q(x_1)$ (20;9) $\mathbf{0}\; r(x_2)$ (21;9) $\mathbf{0}\; s(x_2)$

Nach Anwendung der Substitution $\{x_1/k,\ x_2/k\}$ sind alle Äste dieses Tableaus geschlossen.

4 Formalisierung und Tableaukalkül (1 + 5 Punkte)

a. Geben Sie eine prädikatenlogische Formel G an, die den folgenden Satz formalisiert:

> Es gibt ein x, so daß, wenn x eine Primzahl ist, auch das Quadrat von x eine Primzahl ist.

Hinweis: Verwenden sie ein einstelliges Prädikatensymbol p für „ist Primzahl" und ein Funktionssymbol q für „Quadrat von".

Lösung:

$\exists x(p(x) \to p(q(x)))$

b. Zeigen Sie mit Hilfe des Tableaukalküls, daß die Formel G aus Teilaufgabe a. allgemeingültig ist.

Lösung:

$$
\begin{array}{rl}
(1;-) & \mathbf{0}\ \exists x(p(x) \to p(q(x))) \\
(2;1) & \mathbf{0}\ p(x_1) \to p(q(x_1)) \\
(3;2) & \mathbf{1}\ p(x_1) \\
(4;2) & \mathbf{0}\ p(q(x_1)) \\
(5;1) & \mathbf{0}\ p(x_2) \to p(q(x_2)) \\
(6;5) & \mathbf{1}\ p(x_2) \\
(7;5) & \mathbf{0}\ p(q(x_2))
\end{array}
$$

Dieses Tableau ist nach Anwendung der Substitution $\{x_1/q(x_2)\}$ geschlossen.
(Es ist nicht möglich, das Tableau schon nach nur einer Anwendung der γ-Regel zu schließen, da $p(x_1)$ und $p(q(x_1))$ *nicht* unifizierbar sind.)

5 Resolution (10 Punkte)

Zeigen Sie mittels Resolution, daß die Menge folgender Klauseln unerfüllbar ist:

(1) $\{ \neg s(x),\ \neg q(x) \}$
(2) $\{ \neg p(x),\ q(x),\ r(x) \}$
(3) $\{ p(c),\ q(d) \}$
(4) $\{ \neg q(x),\ s(x) \}$
(5) $\{ \neg r(x),\ s(x) \}$
(6) $\{ \neg p(x),\ \neg r(x) \}$

Hinweis: c und d sind Konstanten.

Lösung:

(7)	$[1,4]$	$\{ \neg q(x) \}$
(8)	$[3,7]$	$\{ p(c) \}$
(9)	$[6,8]$	$\{ \neg r(c) \}$
(10)	$[2,9]$	$\{ \neg p(c),\ q(c) \}$
(11)	$[8,10]$	$\{ q(c) \}$
(12)	$[7,11]$	$\square$

6 Kritische Paare ((1 + 1) + 6 Punkte)

Gegeben Sei das Termersetzungssystem E mit den folgenden Gleichungen:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & x_1 \cap x_1 & \doteq & x_1 \\
(2) & (x_2 \cup y_2) \cap (x_2 \cup z_2) & \doteq & x_2 \cup (y_2 \cap z_2) \\
(3) & x_3 \cap (y_3 \cup x_3) & \doteq & x_3
\end{array}
$$

a. Geben Sie die aus den folgenden Termen mit E ableitbaren irreduziblen Terme an.

i. $a \cap (a \cap (b \cup a))$

Lösung:

$$
\begin{array}{lll}
a \cap (a \cap (b \cup a)) & \rightarrow_{(3)} & a \cap a \\
 & \rightarrow_{(1)} & a
\end{array}
$$

Der Term a ist der einzige ableitbare irreduzible Term.

ii. $(a \cup b) \cap (a \cup b)$

Lösung:

$$
\begin{array}{lll}
(a \cup b) \cap (a \cup b) & \rightarrow_{(1)} & a \cup b \\
(a \cup b) \cap (a \cup b) & \rightarrow_{(2)} & a \cup (b \cap b) \\
 & \rightarrow_{(1)} & a \cup b
\end{array}
$$

Der Term $a \cup b$ ist der einzige ableitbare irreduzible Term.

b. Geben Sie alle kritischen Paare des Termersetzungssystems E an.

Lösung:

Die linken Seiten von (1) und (2) sind mit dem MGU

$$\{x_1/(x_2 \cup z_2),\ y_2/z_2\}$$

unifizierbar. Daraus ergibt sich das kritische Paar

$$(x_2 \cup z_2,\ x_2 \cup (z_2 \cap z_2)) \ .$$

Die linken Seiten von (2) und (3) sind mit dem MGU

$$\{x_3/(x_2 \cup y_2),\ y_3/x_2,\ z_2/(x_2 \cup y_2)\}$$

unifizierbar. Daraus ergibt sich das kritische Paar

$$(x_2 \cup (y_2 \cap (x_2 \cup y_2)),\ x_2 \cup y_2) \ .$$

Die linken Seiten von (1) und (3) sind nicht unifizierbar.
(Außerdem gibt es noch die trivialen kritischen Paare (r, r), die sich durch Überlagerung der linken Seiten l der Gleichungen $l \doteq r$ mit sich selbst ergeben. Es wird nicht als Fehler angesehen, wenn diese nicht angegeben sind.)

7 Unifikation (2 + 2 + 2 Punkte)

Überprüfen Sie jeweils, ob die folgenden Terme unifierbar sind.
Geben Sie, falls die Terme unifizierbar sind, einen allgemeinsten Unifikator an.

a. $p(f(x,y), g(x,y))$ und
$p(f(h(z), h(z)), g(h(z), z))$

Lösung:

Nicht unifizierbar (wegen Occur clash).

b. $p(f(y), w, g(z))$ und
$p(u, u, v)$

Lösung:

Allgemeinster Unifikator:
$\{u/f(y),$
$w/f(y),$
$v/g(z)\ \}$

c. $p(f(y), w, g(z))$ und
$p(v, u, v)$

Lösung:

Nicht unifizierbar.

Diese Seite ist absichtlich frei gelassen.

Diese Seite ist absichtlich frei gelassen.

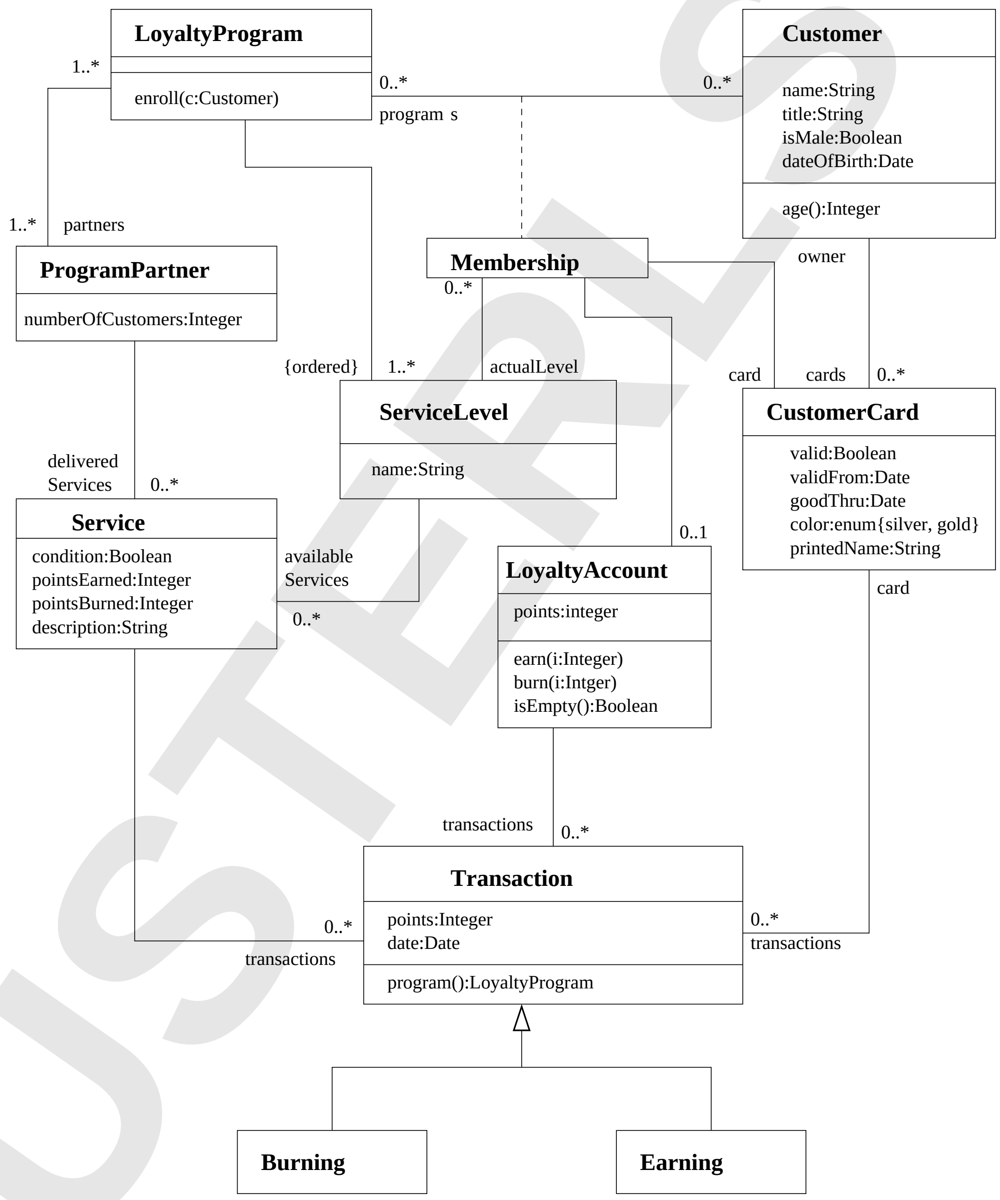

Abbildung zu Aufgabe 8

8 Object Constraint Language ((2 + 3) + (2 + 3) Punkte)

Das links (auf der Rückseite von Blatt 9) dargestellte – aus der Vorlesung bekannte – UML-Klassendiagramm sei gegeben.

a. Geben Sie natürlichsprachliche Übersetzungen der folgenden OCL-Constraints an:

i. `LoyaltyAccount::burn(i:Integer)`

```
post:  points >= 0  and  points < points@pre
```

Lösung:

Wenn bei einem Konto die Methode zum Verbrauchen von Punkten (burn) aufgerufen wird, dann ist hinterher die Punktzahl größer oder gleich Null und sie ist echt kleiner als die Punktzahl vor dem Aufruf der Methode.

ii. `Customer`

```
card.membership->select(
     loyaltyAccount->forall( a | a.isEmpty() = true )
                      )->size <= 3
```

Lösung:

Ein Kunde hat höchstens drei Mitgliedschaften, bei denen alle zugehörigen Konten leer sind (was, da zu jeder Mitgliedschaft entweder kein Konto oder genau ein Konto gehört, genau dann der Fall ist, wenn einer Mitgliedschaft entweder kein Konto zugeordnet ist oder das eine zugeordnete Konto leer ist).

b. Geben Sie OCL-Constraints an, die die folgenden Sachverhalte modellieren:

i. In einem Programm (LoyaltyProgram) gibt es keine verschiedenen Kunden (Customer), bei denen Name (name) und Geburtsdatum (dateOfBirth) übereinstimmen.

Lösung:

`LoyaltyProgram`

```
customer->forAll(c1 | customer->forAll(c2 | c1 <> c2 implies
not (c1.name = c2.name  and  c1.dateOfBirth = c2.dateOfBirth)))
```

ii. Für jeden Partner (ProgramPartner) gilt, daß die Summe der durch von ihm erbrachte Serviceleistungen (deliveredServices) verdienten Punkte (pointsEarned) größer ist als die Summe der durch von ihm erbrachte Serviceleistungen verbrauchten Punkte (pointsBurned).

Hinweis: Verwenden Sie die in OCL eingebaute Operation `sum`; sie liefert, wenn sie auf eine Menge von Zahlen angewendet wird, die Summe dieser Zahlen.

Lösung:

`ProgramPartner`

```
deliveredServices.pointsEarned->sum  >
deliveredServices.pointsBurned->sum
```