Karlsruher Institut für Technologie

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Klausur Formale Systeme

Fakultät für Informatik

SS 2022

Prof. Dr. Bernhard Beckert

4. August 2022

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

A1 (13)	A2 (9)	A3 (4)	A4 (8)	A5 (9)	A6 (10)	A7 (7)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (3 + (2 + 2 + 2) + 4 = 13 Punkte)

a. Geben Sie den reduzierten Shannongraphen für

$$(A \vee B) \leftrightarrow C$$

mit der Variablenordnung

$$A < B < C$$

an.

Fortsetzung 1 Zur Einstimmung

b. Geben Sie kurze Antworten zu folgenden Fragen bzw. Aufgaben:

i. Nennen Sie **zwei** Methoden, mit denen man die Äquivalenz zweier aussagenlogischer Formeln A, B zeigen kann.

ii. Ist die Äquivalenz prädikatenlogischer Formeln entscheidbar?
Wenn ja, geben Sie das Entscheidungsverfahren an. Wenn nein, begründen Sie!

iii. Wie können Sie die Äquivalenz von zwei LTL-Formeln A und B mittels des Leerheitstests ($L \neq \emptyset$) für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ überprüfen?

c. Zeigen Sie die Erfüllbarkeit folgender aussagenlogischer Klauselmenge über $\Sigma = \{A, \dots, E\}$ mit dem **Markierungsalgorithmus**:

$$\{\neg E\},\ \{A, \neg C\},\ \{\neg A, B, \neg C\},\ \{\neg D, E\},\ \{\neg C, A, \neg B\},\ \{\neg E, \neg D\},\ \{\neg B, \neg D, E\},\ \{C\}$$

Geben Sie die Markierungsreihenfolge der Literale sowie ein resultierendes Modell an.

- Markierungsreihenfolge:

- Modell:

x	A	B	C	D	E
$I(x)$					

2 Partielle Funktionen und Undefiniertheit (1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 = 9 Punkte)

In der Prädikatenlogik, wie wir sie in der Vorlesung kennengelernt haben, sind alle Funktionen total. Will man partielle Funktionen in Prädikatenlogik modellieren, gibt es verschiedene Möglichkeiten, zum Beispiel die Einführung eines besonderen Elements $undef \in D$ im Universum der Modelle und die Einführung eines Prädikats def, das die Definiertheit von Termen ausdrückt.

Beispiel: Wird die Funktion div als Division interpretiert, dann ist

$$I(div)(1,0) = undef \qquad\qquad I(def(div(1,0))) = F$$

a. Wie sollte man $I(f)(undef)$ für ein beliebiges einstelliges Funktionssymbol f definieren?

---

b. Was folgt aus obiger Formalisierung der Undefiniertheit für die Gleichheit undefinierter Terme? Was gilt beispielsweise für $div(1,0) \doteq div(2,0)$?

---

c. Wie könnte man das unerwünschte Ergebnis aus b. vermeiden?

---

d. Wie sollte man die Interpretation $I(def)$ des Prädikats def definieren?

---

e. Sei t ein beliebiger arithmetischer Term, dessen Symbole wie in der Arithmetik üblich interpretiert werden; außerdem sei div als Division interpretiert (wie bisher in dieser Aufgabe).

Welchen Wahrheitswert hat dann die folgende Formel in Abhängigkeit von dem Wert $val_I(t)$ des Terms t?

$$def(t) \rightarrow (div(t,t) \doteq 1)$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

---

f. Formalisieren Sie: „Wenn $1/x$ definiert ist, dann ist jedes Vielfache von $1/x$ definiert."

---

3 Kurze konjunktive Normalform (4 Punkte)

Geben Sie für die Formel

$$(A_1 \land A_2) \leftrightarrow \neg(A_3 \leftrightarrow A_4)$$

eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in **kurzer konjunktiver Normalform (kKNF)** an.

4 Formalisieren in Prädikatenlogik (PL1) (1 + 2 + 2,5 + 2,5 = 8 Punkte)

Wir modellieren Eigenschaften von Wörtern in der Prädikatenlogik erster Ordnung mit Gleichheit.

Gegeben sei dazu die prädikatenlogische Signatur $\Sigma = (\{\varepsilon, \mathit{umkehrung}(\cdot)\}, \{\mathit{teilwort}(\cdot,\cdot)\}, \alpha)$. Sie enthält

- das Konstantensymbol ε,
- das einstellige Funktionssymbol *umkehrung* und
- das zweistellige Prädikatensymbol *teilwort*

mit der folgenden beabsichtigten Semantik:

ε	das leere Wort
$\mathit{umkehrung}(w)$	die Umkehrung von w
$\mathit{teilwort}(v, w)$	v ist ein Teilwort von w

Die Formeln werden nur mit solchen Interpretationen (D, I) ausgewertet, deren Universum D ausschließlich aus Wörtern (über einem beliebigen Alphabet) besteht.

Geben Sie jeweils eine Formel der Prädikatenlogik über Σ an, die folgende Sachverhalte darstellt:

a. Das leere Wort ist ein Teilwort jedes Wortes.

b. Es gibt keine zwei verschiedenen Wörter, die sich gegenseitig als Teilwort enthalten.

c. Ein Wort ist genau dann ein Palindrom, wenn jedes Teilwort auch ein Teilwort seiner Umkehrung ist.
Hinweis: Ein Palindrom ist ein Wort, das gleich seiner Umkehrung ist.

d. Es gibt ein Wort, das selbst kein Palindrom ist, aber dessen echte Teilwörter alle Palindrome sind.
Hinweis: *Echte Teilwörter* eines Wortes w sind die Teilwörter von w außer w selbst.

5 Sequenzenkalkül (9 Punkte)

Es sei eine aussagenlogische Signatur gegeben, die die Variablen A, B, C, D und E enthält.

Vervollständigen und schließen Sie den untenstehenden Sequenzenbeweis. Notieren Sie dabei:

- jeden Abschluss eines Astes,
- bei Abschlüssen und Regelanwendungen die jeweils verursachende(n) Formel(n) (wie für die ersten vier Knoten bereits vorgegeben).

Hinweis: Der Wurzelknoten des Sequenzenbeweises für eine Formel φ ist markiert mit "$\Longrightarrow \varphi$".

$A \wedge \neg B, A \to B, \neg C \to D \Longrightarrow E \qquad \neg C \wedge \neg D, A \to B, \neg C \to D \Longrightarrow E$

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg D), A \to B, \neg C \to D \Longrightarrow E \qquad E, A \to B, \neg C \to D \Longrightarrow E$

$\boxed{(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee E}, A \to B, \neg C \to D \Longrightarrow E$

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee E, A \to B \Longrightarrow \boxed{(\neg C \to D) \to E}$

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee E \Longrightarrow \boxed{(A \to B) \to ((\neg C \to D) \to E)}$

$\Longrightarrow \boxed{((A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee E) \to ((A \to B) \to ((\neg C \to D) \to E))}$

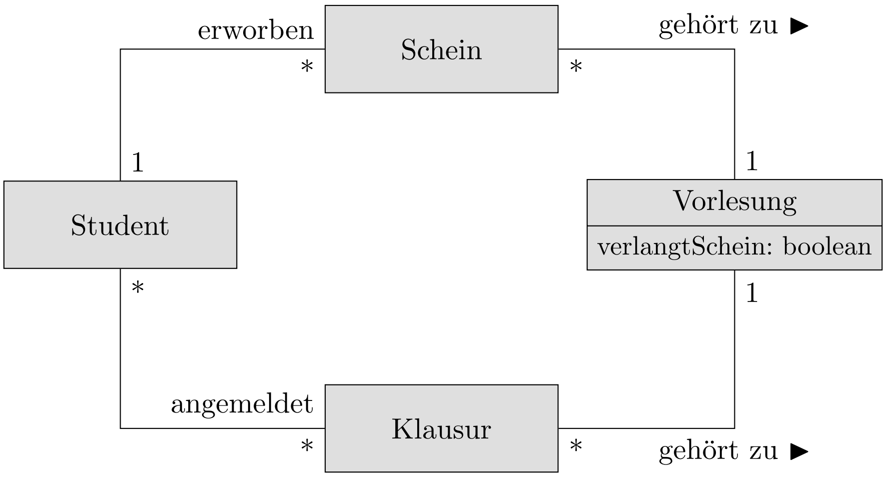
6 Spezifikation mit der Java Modeling Language

(4 + 6 = 10 Punkte)

a. Geben Sie in natürlicher Sprache wieder, was der folgende JML-Methodenvertrag für die Methode `m` aussagt.

```
public final class A {
    /*@ public normal_behavior
      @ requires (\forall int i; 0 <= i && i < a.length; a[i] != null
      @                                               && a[i].length == b.length);
      @ requires b.length > 0;
      @ requires a.length > 0;
      @ assignable \nothing;
      @ ensures \result.length == a.length;
      @ ensures (\forall int j; 0 <= j && j < \result.length;
      @             \result[j] == (\sum int k; 0 <= k && k < b.length;
      @                                        a[j][k] * b[k]));
      @*/
    public static int[] m(int[][] a, int[] b) { ... }
}
```

Fortsetzung 6 Spezifikation mit der Java Modeling Language



b. Unten sehen Sie passenden Java-Code zum oben abgebildeten UML-Klassendiagramm. Geben Sie eine JML-Objektinvariante für die Klasse Student an, die folgenden Sachverhalt formalisiert:

„Jeder Student kann nur zu den Klausuren angemeldet sein, für deren zugehörige Vorlesungen jeweils gilt: Die Vorlesung verlangt keinen Schein oder der Student hat (mindestens) einen passenden Schein für die Vorlesung erworben.“

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass Sie in jeder Klasse direkt auf alle Attribute der anderen Klassen zugreifen können. Außerdem können Sie davon ausgehen, dass es zu jeder Vorlesung nur ein Java-Objekt gibt; Vorlesungen können also direkt mit `==` verglichen werden.

```
class Student {
    Schein[] erworben;
    Klausur[] angemeldet;

    /*@ ____________________________________________

      @ ____________________________________________

      @ ____________________________________________

      @ ____________________________________________

      @*/
}
```

```
class Schein {
    Student s;
    Vorlesung v;
}
```

```
class Klausur {
    Vorlesung v;
    Student[] angemeldet;
}
```

```
class Vorlesung {
    boolean verlangtSchein;
    Klausur[] klausuren;
}
```

7 Lineare Temporale Logik (LTL) (2 + 1 + 4 = 7 Punkte)

Im Folgenden soll eine Eigenschaft im Lebenszyklus eines Buches in einer Bibliothek mittels LTL formalisiert werden. Es wird folgende Signatur verwendet:

$$\Sigma = \{l, r\}$$

Dabei gilt: l ist wahr gdw. das Buch ausgeliehen ist; r ist wahr gdw. das Buch reserviert ist.

Gegeben ist die folgende LTL-Formel F:

$$\Box(r \to (l \to \neg(\mathbf{X}l \land \mathbf{XX}l)))$$

a. Geben Sie die Eigenschaft, die von F ausgedrückt wird, in natürlicher Sprache wieder. Ein Zeitschritt in der Logik repräsentiert eine Woche.

---

b. Geben Sie eine Omega-Struktur ξ an, sodass $\xi \not\models F$ gilt.

---

c. Geben Sie einen Büchi-Automaten an, dessen akzeptierte Sprache den Modellen (ω-Wörtern) der LTL-Formel F entspricht.

Für das Vokabular $V = \mathbb{P}(\Sigma)$ (Potenzmenge von Σ) werden die folgenden, aus der Vorlesung bekannten, Abkürzungen definiert:

$$L = \{M \in V \mid l \in M\} \subset V \qquad R = \{M \in V \mid r \in M\} \subset V$$
$$\overline{L} = \{M \in V \mid l \notin M\} \subset V \qquad \overline{R} = \{M \in V \mid r \notin M\} \subset V$$

Notizen/Schmierpapier — Sollen Ihre Notizen bewertet werden, ist eine klare Zuordnung notwendig (Verweis in der ursprünglichen Aufgabe, sowie klare Aufgabennummer in den Notizen).