

<b>Vorname:</b>	**Vorname**
<b>Name:</b>	**Familiennamen**
<b>Matrikel-Nr.:</b>	**Matr.-Nr.**
<b>Hörsaal:</b>	**Hörsaal** **Sitzplatz**
<b>Code:</b>	**Nonce**

**Klausur Formale Systeme**  
Fakultät für Informatik  
SS 2021

Prof. Dr. Bernhard Beckert  
04. August 2021

*Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.*

A1 (14)	A2 (9)	A3 (5)	A4 (8)	A5 (8)	A6 (9)	A7 (7)	$\Sigma$ (60)

**Bewertungstabelle bitte frei lassen!**

**Gesamtpunkte:**

# 1 Zur Einstimmung

((2+3) + 5 + 4 = 14 Punkte)

- a. Seien  $p, q$  einstellige Prädikatensymbole,  $c$  ein nullstelliges Funktionssymbol (Konstante) und  $f$  ein einstelliges Funktionssymbol.

Geben Sie für folgende prädikatenlogische Formeln – **falls möglich** – jeweils zwei Interpretationen  $I$  über dem Universum  $D = \{a, b\}$  an, und zwar jeweils

- eine Interpretation, in der die Formel **wahr** ist, und
- eine Interpretation, in der die Formel **falsch** ist.

In den Fällen, in denen eine Interpretation mit der gesuchten Eigenschaft **nicht existiert**, geben Sie dies an.

*Hinweis:* Es muss explizit angegeben werden, wenn eine passende Interpretation nicht existiert (schreiben Sie „existiert nicht“ neben den Kästen). Es genügt nicht, die Beschreibung der Interpretation leer zu lassen.

- i.  $\forall y \exists x (p(y) \rightarrow (q(x) \rightarrow \neg p(c)))$

Interpretation, in der die Formel wahr ist:

$I(c) =$	$I(p)(a) =$	$I(p)(b) =$
	$I(q)(a) =$	$I(q)(b) =$

Interpretation, in der die Formel falsch ist:

$I(c) =$	$I(p)(a) =$	$I(p)(b) =$
	$I(q)(a) =$	$I(q)(b) =$

- ii.  $(\forall x p(x) \leftrightarrow \neg p(f(x))) \rightarrow \neg p(c)$

Interpretation, in der die Formel wahr ist:

$I(p)(a) =$	$I(p)(b) =$	
$I(f)(a) =$	$I(f)(b) =$	$I(c) =$

Interpretation, in der die Formel falsch ist:

$I(p)(a) =$	$I(p)(b) =$	
$I(f)(a) =$	$I(f)(b) =$	$I(c) =$

## Fortsetzung 1 Zur Einstimmung

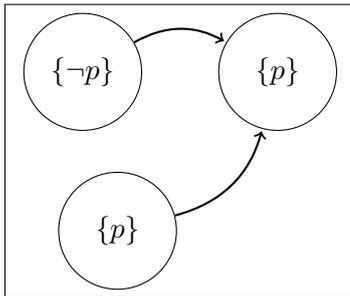
b. Geben Sie kurze Antworten zu folgenden Fragen bzw. Aufgaben:

i. Was ist eine Herbrand-Struktur?

---

---

ii. **Ergänzen** Sie die Erreichbarkeitsrelationen in der unten gegebenen Kripestuktur  $\mathcal{K}$  über  $\Sigma = \{p\}$ , sodass  $\mathcal{K} \models (\diamond \neg p \wedge \diamond p)$  gilt.



iii. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator für  $g(h(x), f(c), g(h(x)))$  und  $g(h(f(y)), f(d), g(y))$  an, falls es einen gibt. (Funktionssymbole:  $g, h, f$ ; Variablen:  $x, y$ ; Konstanten:  $c, d$ )

---

iv. Wann heißt eine Theorie  $T$  konsistent?

---

v. Geben Sie zu der Formel  $sh(B, C, \mathbf{1})$  eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform (DNF) an.

---

c. Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit bzw. Erfüllbarkeit folgender Hornklauselmengen über den aussagenlogischen Variablen  $\{A, B, C, D, E, F\}$  mittels des Markierungsalgorithmus:

•  $E \rightarrow F$

i. Geben Sie Ihre Markierungsreihenfolge der Variablen an:

•  $A \wedge C \rightarrow E$

---

•  $C \wedge B \rightarrow A$

ii. Geben Sie ein Modell der Formelmengen aus Ihren Markierungen an oder begründen Sie die Unerfüllbarkeit:

•  $A$

---

•  $A \wedge B \rightarrow C$

•  $A \wedge F \rightarrow E$

•  $F \rightarrow \mathbf{0}$

•  $C$

## 2 Modellierung von Fairness in LTL (2 + 3 + (2 + 2) = 9 Punkte)

Beim Scheduling unterscheidet man häufig zwei Arten von Fairness:

**Schwache Fairness:** Es gilt immer, dass eine Aktion, die **hinreichend (unbeschränkt) lange** ausführbar (waiting) ist, irgendwann ausgeführt wird (executing).

**Starke Fairness:** Es gilt immer, dass eine Aktion, die **hinreichend (unbeschränkt) oft** ausführbar (waiting) ist, irgendwann ausgeführt wird (executing).

Intuitiv ist der Unterschied zwischen beiden Begriffen, dass schwache Fairness ununterbrochenes Warten verlangt, während starke Fairness Unterbrechungen beim Warten zulässt.

- a. Schwache Fairness kann in Linearer Temporaler Logik (LTL) beispielsweise wie folgt modelliert werden:

$$\Box( \textit{Waiting} \rightarrow (\Diamond \textit{Executing} \vee \Diamond \neg \textit{Waiting}) )$$

Diese Formel lässt sich vereinfachen. Geben Sie eine einfachere, äquivalente Formel an.

*Hinweis:* „Einfacher“ ist hier syntaktisch zu verstehen (weniger Symbole, geringere Schachtelungstiefe); ob die einfachere Formel auch besser verständlich ist, soll hier keine Rolle spielen.

- b. Geben Sie eine entsprechende LTL-Formel an, die starke Fairness modelliert.
- c. Betrachten wir das Beispiel einer Telefon-Hotline.
- i. Welche Art der Fairness (starke oder schwache) können Anrufer gewöhnlich von einer Telefon-Hotline erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.
  - ii. Wie müsste eine Telefon-Hotline funktionieren, um die andere Art von Fairness zu implementieren?

### 3 Entscheidungsverfahren für uninterpretierte Funktionssymbole (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Gegeben sei die Signatur, die nur die beiden einstelligen Funktionssymbole  $f$  und  $g$  und die beiden Konstanten  $a$  und  $b$  enthält.

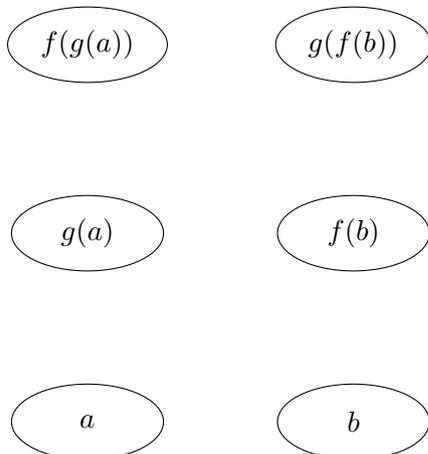
Die folgende Formel ist zu untersuchen:

$$\begin{array}{cccccc}
 f(g(a)) \doteq g(f(b)) & \wedge & \neg a \doteq b & \wedge & g(b) \doteq b & \wedge & g(a) \doteq a & \wedge & f(b) \doteq a & \wedge & \neg f(b) \doteq g(b) & (1) \\
 (A) & & (B) & & (C) & & (D) & & (E) & & (F) & 
 \end{array}$$

Wenden Sie nun den Algorithmus nach *Shostak* auf die Formel (1) an, indem Sie den Kongruenzgraphen (wie in der Vorlesung/Übung) erstellen. Durchgezogene Kanten stehen für Gleichheiten und gestrichelte Kanten für Ungleichheiten.

- a. Tragen Sie die Informationen aus (1) als Kanten zwischen den untenstehenden Knoten ein. Beschriften Sie die Kanten mit (A) bis (F).
- b. Ergänzen Sie den Graphen um weitere Kanten gemäß dem Algorithmus. Benennen Sie diese Kanten mit (G), (H) usw. Tragen Sie für jede hinzugefügte Kante im Graphen in die Tabelle ein:
  1. welchen Typs die neue Kante ist: „T“ für Transitive Kante, „K“ für Kongruenzkante und
  2. welche bisherigen Kante(n) die neue Kante begründet.

Es gibt Lösungen, die nicht die volle Anzahl an Tabellenzeilen benötigen.



Name	Typ	Begründung
(G)		
(H)		
(I)		
(K)		

- c. Lesen Sie aus dem fertigen Graphen ab, ob (1) erfüllbar ist oder nicht. Begründen Sie.

---



---



## 5 Resolution

(4 + 4 = 8 Punkte)

### a. Normalform für den prädikatenlogischen Resolutionskalkül

Es soll geprüft werden, ob die untenstehende Aussage über den logischen Zusammenhang zwischen den beiden Formeln gilt. Bringen Sie dazu die Aussage in Klauselnormalform, so dass der prädikatenlogische Resolutionskalkül angewendet werden kann.

Notieren Sie die entstehenden Klauseln sowie alle Symbole, die durch Skolemisierung entstehen.

*Hinweis:* Sie müssen den Resolutionsbeweis **nicht** durchführen!

$$(\forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow \exists z (q(x, z) \vee q(y, z)))) \models \forall x (\exists z q(x, f(z)) \vee \neg(p(x, x)))$$

### b. Aussagenlogischer Resolutionskalkül

Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit der folgenden aussagenlogischen Formel mittels des Resolutionskalküls.

$$(B \vee \neg E) \wedge (A \vee B) \wedge \neg E \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee B \vee E) \wedge (\neg B \vee C \vee D \vee E)$$



## Fortsetzung 6 Spezifikation mit der Java Modeling Language

- b. Vervollständigen Sie den folgenden Methodenvertrag für die Methode `kgv`, die für ein gegebenes, nichtleeres Array von ganzen Zahlen größer als 0 das **kleinste gemeinsame Vielfache** aller Arrayelemente berechnet. Die Methode terminiert immer, wirft keine Exception und ändert keine bestehenden Speicherstellen auf dem Heap.

*Hinweis:* Für  $n > 0$  ist das **kleinste gemeinsame Vielfache** der Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ , die jeweils größer als 0 sind, definiert als die kleinste Zahl, die ein Vielfaches aller  $a_i$  (für  $0 \leq i \leq n$ ) ist.

```
public class A {  
    /*@ public _____  
    @ requires _____  
    @ _____  
    @ _____  
    @ assignable _____  
    @ ensures _____  
    @ _____  
    @ _____  
    @ _____  
    @ _____  
    @*/  
    public static int kgv(int[] a) { ... }  
}
```

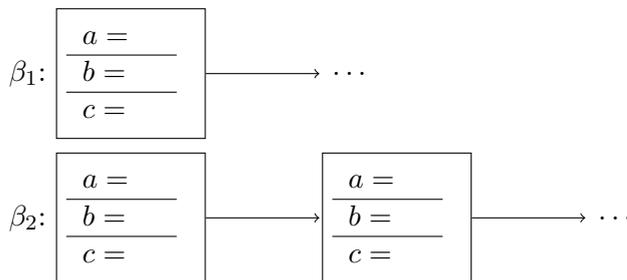
## 7 Lineare Temporale Logik (LTL) und Büchi-Automaten (4 + 3 = 7 Punkte)

- a. Die LTL-Formel  $\underbrace{(a \mathbf{U} b)}_X \mathbf{U} c$  ist nicht äquivalent zu  $a \mathbf{U} \underbrace{(b \mathbf{U} c)}_Y$  über der Signatur  $\Sigma = \{a, b, c\}$ .

Ergänzen Sie die Variablenbelegung für die Zeitpunkte (Rechtecke) in den untenstehenden  $\omega$ -Strukturen  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , so dass ...

- i.  $\beta_1 \models X$  und  $\beta_1 \models Y$
- ii.  $\beta_2 \not\models X$  und  $\beta_2 \models Y$

*Hinweis:* Nicht spezifizierte Belegungen gelten als beliebig ("don't-care"). Sie können **bei Bedarf weitere Zeitpunkte** in den  $\omega$ -Strukturen ergänzen.



- b. Geben Sie für den untenstehenden nicht-deterministischen Büchi-Automaten eine äquivalente LTL-Formel über  $\Sigma = \{a, b\}$  an.

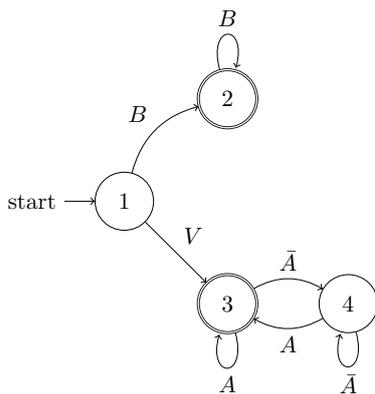
Über dem Vokabular  $V = \mathbb{P}(\Sigma)$  (Potenzmenge von  $\Sigma$ ) werden die folgenden, aus der Vorlesung bekannten, Abkürzungen definiert:

$$A = \{M \in V \mid a \in M\} \subset V$$

$$\bar{A} = \{M \in V \mid a \notin M\} \subset V$$

$$B = \{M \in V \mid b \in M\} \subset V$$

$$\bar{B} = \{M \in V \mid b \notin M\} \subset V$$



LTL-Formel:

\_\_\_\_\_

**Notizen/Schmierpapier** — Sollen Ihre Notizen bewertet werden, ist eine klare Zuordnung notwendig (Verweis in der ursprünglichen Aufgabe, sowie klare Aufgabennummer in den Notizen).

---

Zum Abreißen und Mitnehmen — Klausur Formale Systeme SS 2021

**Vorname:** \*\*Vorname\*\*      **Name:** \*\*Familienname\*\*  
**Matrikel-Nr.:** \*\*Matr.-Nr.\*\*      **Hörsaal:** \*\*Hörsaal\*\* \*\*Sitzplatz\*\*  
**Code:** \*\*Nonce\*\*