Klausur Formale Systeme

Fakultät für Informatik

SS 2016

Prof. Dr. Bernhard Beckert

05. August 2016

Vorname: **Vorname**
Name: **Familienname**
Matrikel-Nr.: **Matr.-Nr.**

Platz-Nr.: **Hörsaal** **Sitzplatz**
Code: **Nonce**

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

A1 (13)	A2 (5)	A3 (8)	A4 (8)	A5 (11)	A6 (7)	A7 (8)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5+5+3 = 13 Punkte)

a. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle alles Zutreffende an.

Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, **für jede falsche Antwort wird ein *halber Punkt* abgezogen!** (Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)“, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- p, q, r und s sind Prädikatensymbole, f ist ein Funktionssymbol, c ist ein Konstantensymbol und x, y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

	keine Formel der PL1	allgemeingültig	erfüllbar, aber nicht allgemeingültig	unerfüllbar
$(\exists x\, p(x)) \leftrightarrow (p(c) \wedge (\exists x\, p(x)))$				
$\forall x \forall y (p(x) \vee \neg p(y))$				
$\exists f\ \forall x\, (f(x) \doteq x)$				
$\neg q \wedge (\neg r \rightarrow (\neg s \wedge q)) \wedge (r \rightarrow (s \wedge q))$				
$((\exists x\, \neg p(x)) \rightarrow \mathbf{0}) \rightarrow p(f(c))$				

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird *ein Punkt* abgezogen**. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Die Zahl der Knoten eines reduzierten Shannon-Graphen zu einer Formel F ist unabhängig von der gewählten Variablenordnung.		
Sei F eine Formel der PL1. Aus der Vollständigkeit des Tableaukalküls folgt, dass ein geschlossenes Tableau für F oder eines für $\neg F$ existiert.		
Der Unifikationsalgorithmus nach Robinson terminiert immer.		
Für Formeln der PL1, die weder Variablen noch Quantoren enthalten (d. h., alle Terme sind Grundterme), ist das Erfüllbarkeitsproblem entscheidbar.		
Für jeden Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\mathbb{P}(\Sigma)$ gibt es eine LTL-Formel F über der Signatur Σ, so dass die von $\mathcal{A}$ akzeptieren ω-Strukturen genau die Modelle von F sind.		

Fortsetzung 1 Zur Einstimmung

c. Nicht jedes Reduktionssystem, das *lokal konfluent* ist, ist auch *konfluent*.

Geben Sie dafür ein Beispiel! Das heißt: Geben Sie ein Reduktionssystem $(D, \succ)$ an, das

- zwar *lokal konfluent*,
- jedoch *nicht konfluent*

ist.

2 Peano-Axiome und Arithmetik (2+3 Punkte)

Seien (wie in der Vorlesung)

- PA
  die (Menge der) Peano-Axiome,
- $\mathrm{Cn}(\mathrm{PA}) = \{\phi \in Fml_{\Sigma_{\mathrm{PA}}} \mid \mathrm{PA} \models \phi\}$
  die Menge der prädikatenlogischen Formeln, die aus den Peano-Axiomen logisch folgen,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, *, 0, 1)$
  die prädikatenlogische Struktur, deren Universum die Menge der natürlichen Zahlen ist und in der $+, *, 0, 1$ wie in der Arithmetik üblich interpretiert sind,
- $\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = \{\phi \in Fml_{\Sigma_{\mathrm{PA}}} \mid \mathcal{N} \models \phi\}$
  die Menge der in $\mathcal{N}$ wahren Formeln.

a. Welche der Mengen Cn(PA) und Th($\mathcal{N}$) ist *rekursiv aufzählbar*?

☐ Keine ☐ Nur Cn(PA) ☐ Nur Th($\mathcal{N}$) ☐ Beide

b. Welche Bedeutung hat der Unterschied zwischen Cn(PA) und Th($\mathcal{N}$) für die Praxis?
Begründen Sie (kurz) ihre Antwort!

3 DPLL (8 Punkte)

Gegeben sei die folgende Menge M aussagenlogischer Klauseln:

$$\{\{\neg A, \neg C, D\},\ \ \{\neg D, \neg B, A\},\ \ \{\neg D, E, \neg B\},\ \ \{\neg C, \neg B, A\},\ \ \{\neg D, \neg B, \neg E\},\ \ \{E, \neg A, D\},\ \ \{C\}\}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Davis-Putnam-Loveland-Algorithmus, dass M **erfüllbar** ist. Geben Sie die Zwischenschritte und das sich ergebende **Modell** an.

Wichtig:

1. Wenn Sie Fallunterscheidungen machen müssen, nehmen Sie diese in **alphabetischer Reihenfolge** vor (also A vor B, usw.).
2. Betrachten Sie **zuerst** immer komplett den Fall mit **positiver Polarität**, bevor Sie mit dem negativen Fall anfangen.
3. Es reicht, nur **ein** Modell zu finden, Sie müssen also nicht den gesamten Belegungsraum durchsuchen!

4 Formalisieren in PL1 (8 Punkte)

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit. Benutzen Sie dafür die jeweils angegebenen interpretierten Symbole.

a. Hunde und Katzen sind Säugetiere.
Prädikate: $hund(\cdot), katze(\cdot), s\ddot{a}ugetier(\cdot)$.

---

b. Nur eine tote Spinne ist eine gute Spinne.
Prädikate: $spinne(\cdot), tot(\cdot), gut(\cdot)$.

---

c. Wer eine Katze hat, hat keinen Hund.
Prädikate: $katze(\cdot), hund(\cdot), hat(\cdot, \cdot)$.

---

d. Alle Teilnehmer außer einem haben bestanden.
Prädikate: $teilnehmer(\cdot), bestanden(\cdot)$.

---

5 Tableaukalkül + Resolution (4+7 = 11 Punkte)

Im Folgenden sind p, q einstellige Prädikatensymbole, f, g einstellige Funktionssymbole, c ein Konstantensymbol und alle sonstigen Bezeichner Variablensymbole.

a. Bilden Sie alle möglichen Klauseln, die durch **je einen einzigen** Resolutionsschritt aus den folgenden PL1-Klauseln ableitbar sind.

Notieren Sie die Beweisschritte so, dass bei jeder neu entstehenden Klausel klar erkennbar ist, aus welchen Elternklauseln sie entsteht und welche Substitution verwendet wurde.

$$\underset{(1)}{\{q(c)\}} \qquad \underset{(2)}{\{\neg q(x), q(f(x))\}} \qquad \underset{(3)}{\{\neg q(f(x)), q(g(x))\}}$$

Fortsetzung 5 Tableaukalkül + Resolution

b. Vervollständigen und schließen Sie den folgenden Tableau-Beweis.

Hinweis: Auf eine der γ-Formeln muss zweimal eine Regel angewendet werden.

Notieren Sie bei Ihrem Beweis:

- den Regeltyp ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) und die Formel, auf die eine Regel angewendet wird,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- sowie die schließende Substitution.

$$1\,\exists x\ p(x) \qquad (1)$$
$$|$$
$$1\,\forall x\ (p(x) \to p(f(x))) \qquad (2)$$
$$|$$
$$1\,\forall x\ (p(f(x)) \to p(g(g(x)))) \qquad (3)$$
$$|$$
$$0\,\exists x\ p(f(g(x))) \qquad (4)$$
$$|$$

6 Spezifikation mit der Java Modeling Language (4+3 = 7 Punkte)

a. Gegeben sei die Methode `doubleEvenNumbers(int[] a)`, die folgende Funktionalität implementiert:

> Die Methode ändert das Array `a`, indem *genau* die Elemente von `a` mit 2 multipliziert werden, deren Werte *gerade* sind.
> (Beispielsweise ist bei Eingabe von `a = {3, 2, 4}` das resultierende Array `a = {3, 4, 8}`.)

Formalisieren Sie diese Verhaltensbeschreibung, indem Sie einen präzisen und vollständigen JML-Vertrag für diese Methode angeben:

```
/*@ public normal_behavior
  @ requires true;
  @
  @ ensures
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @
  @ assignable
  @*/
  public void doubleEvenNumbers(int[] a) { ... }
```

b. Geben Sie die Bedeutung des folgenden Methodenvertrags in natürlicher Sprache wieder:

```
/*@ public normal_behavior
  @ ensures (\exists int j, i; 0 <= i && i < a.length && 0 <= j && j <= i;
  @                     a[i] == a[j] &&  i - j == \result);
  @ ensures (\forall int j, i; 0 <= i && i < a.length && 0 <= j && j <= i;
  @                     a[i] == a[j] ==> i - j <= \result);
  @*/
public int f(int[] a) { ... }
```

Hinweis: Es gibt genau drei Unterschiede zwischen der ersten und zweiten Nachbedingung. Diese Unterschiede sind durch **`Unterstreichen und Fettdruck`** hervorgehoben.

7 Büchi-Automaten und LTL (4+3+1 = 8 Punkte)

a. Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{p, q\}$ und das zugehörige Alphabet $V = \mathbb{P}(\Sigma) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$. Geben Sie einen Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ über dem Alphabet V an, der genau die LTL-Formel

$$(\Diamond p) \wedge (\Diamond \neg q)$$

akzeptiert, d.h., so dass $L^\omega(\mathcal{A}_1) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models (\Diamond p) \wedge (\Diamond \neg q)\}$ gilt.

Es können dabei die folgenden Abkürzungen verwendet werden:

$$P = \{\{p\}, \{p, q\}\}, \quad \overline{P} = \{\emptyset, \{q\}\}, \quad Q = \{\{q\}, \{p, q\}\}, \quad \overline{Q} = \{\emptyset, \{p\}\}$$
$$PQ = \{\{p, q\}\}, \quad \overline{P}Q = \{\{q\}\}, \quad P\overline{Q} = \{\{p\}\} \quad \overline{PQ} = \{\emptyset\}$$

$\mathcal{A}$:

b. Geben Sie zu folgenden LTL-Formeln φ_1 und φ_2 jeweils eine äquivalente LTL-Formel an, die als temporale Modaloperatoren nur $\Box$ und $\Diamond$ verwendet (d. h., $\mathbf{U}$ bzw. $\mathbf{U_W}$ kommt nicht vor):

$$\varphi_1 \equiv \Diamond(a \mathbin{\mathbf{U}} b) \qquad \leftrightarrow \qquad \rule{8cm}{0.4pt}$$

$$\varphi_2 \equiv \Diamond(a \mathbin{\mathbf{U_W}} b) \qquad \leftrightarrow \qquad \rule{8cm}{0.4pt}$$

c. Formalisieren Sie den folgenden natürlichsprachigen Sachverhalt über der atomaren Aussage A in LTL:

Es gibt keine direkt aufeinanderfolgenden Zeitpunkte, in denen A wahr ist.

____