



Klausur Formale Systeme
Fakultät für Informatik
SS 2015

Prof. Dr. Bernhard Beckert

31. Juli 2015

Name: _____

Vorname: _____

Matrikel-Nr.: _____

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

A1 (10)	A2 (8)	A3 (6)	A4 (7)	A5 (9)	A6 (11)	A7 (9)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung

(5+5 = 10 Punkte)

a. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle alles Zutreffende an.

Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, **für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!** (Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der zwei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit \doteq)“, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- $P_1, P_2,$ und p sind Prädikatensymbole, f ist ein Funktionssymbol, c ist ein Konstantensymbol, und x, y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

	keine Formel der PL1	allgemeingültig	erfüllbar, aber nicht allgemeingültig	unerfüllbar
$(\forall x(p(f(x)) \rightarrow \neg p(f(x)))) \wedge p(c)$				
$(\forall x(p(f(x)) \rightarrow \neg p(f(x)))) \wedge p(f(c))$				
$(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow \neg P_1)$				
$\exists f \forall x (f(x) \doteq x)$				
$(\forall x f(x) \doteq x) \rightarrow (\forall x \forall y (f(x) \doteq f(y) \rightarrow x \doteq y))$				

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen.** Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit hat auch ein Modell mit einer unendlichen Domäne.		
Sei Σ eine endliche aussagenlogische Signatur. Wenn für zwei aussagenlogische Formeln F und G über Σ die Formel $F \rightarrow G$ allgemeingültig ist, so hat G mindestens so viele erfüllende Belegungen wie F .		
Die beiden prädikatenlogischen Terme $h(f(x), g(y))$ und $h(f(y), g(f(x)))$ sind unifizierbar.		
Wenn in einer Kripkestruktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ die Formel A in allen Zuständen $s \in S$ wahr ist, dann ist auch $\Box A$ in allen Zuständen wahr.		
Wenn eine aussagenlogische Formel allgemeingültig ist, dann hat der reduzierte Shannongraph zu dieser Formel genau einen Knoten.		

3 Aussagenlogik, kurze KNF

(1+5 = 6 Punkte)

Gegeben sei eine aussagenlogische Signatur Σ mit $2n$ Variablen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$.

Die schematische aussagenlogische Formel

$$\phi = \neg(A_1 \leftrightarrow B_1) \vee \dots \vee \neg(A_n \leftrightarrow B_n)$$

über Σ hat die folgende Eigenschaft: ϕ ist genau dann in einer Variablenbelegung wahr, wenn es (mindestens) einen Index $1 \leq i \leq n$ gibt, so dass A_i und B_i unterschiedlich belegt sind.

- a. Geben Sie eine schematische aussagenlogische Formel χ über Σ an, die äquivalent zu ϕ ist und nur Konjunktion \wedge , Disjunktion \vee und Negation \neg als logische Operationen enthält.

- b. Geben Sie eine aussagenlogische Formel ψ über einer geeigneten Signatur an, die in konjunktiver Normalform und erfüllbarkeitsäquivalent zu ϕ und χ ist. Machen Sie dabei Ihre Vorgehensweise deutlich.

Hinweis: Nutzen Sie zur Konstruktion die in der Vorlesung vorgestellte Idee der kurzen KNF.

4 Formalisieren in PL1

(1+2+1+3 = 7 Punkte)

Formalisieren Sie die vier folgenden Aussagen mittels Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit. Benutzen Sie dafür jeweils die angegebenen interpretierten Symbole.

- a. Kein Mensch ist eine Insel.
Prädikate: *mensch*(\cdot), *insel*(\cdot).
-

- b. Es gibt nur ein Rudi Völler.
Prädikat: *rudivöller*(\cdot).
-

- c. Nur die Liebe zählt.
Prädikate: *liebe*(\cdot), *zählt*(\cdot).
-

- d. Wenn zwei sich streiten, freut sich der dritte.
Prädikate: *streiten*(\cdot , \cdot), *freuen*(\cdot).
-

5 Tableau

(5+4 = 9 Punkte)

Die folgenden beiden Teilaufgaben erfordern die Erstellung eines Tableaus. Notieren Sie in jedem Tableau:

- bei jeder Erweiterung: Durch welche Regelnwendung eine Formel auf dem Tableau entstanden ist,
- bei Abschlüssen: Die beiden Partner,
- die schließende Substitution.

a. Vervollständigen Sie den folgenden Tableau-Beweis:

$$\begin{array}{l} 1 \neg p(c, d) \quad (1) \\ | \\ 1 \forall y \exists x p(x, y) \quad (2) \\ | \\ 1 \forall z (p(z, c) \rightarrow \forall y \neg p(y, d)) \quad (3) \\ | \end{array}$$

Fortsetzung: Tableau

- b. Zeigen Sie, dass folgende Formel F **allgemeingültig** ist. Ergänzen Sie zunächst vor der Wurzel in folgendem Tableaubeweis das dazu benötigte Vorzeichen. Schließen Sie dann das Tableau.

Hinweis: Vergeben Sie Abkürzungen für Teilformeln von F (durch geeignetes Markieren der Teilformeln und Benennung im dafür vorgesehenen Kasten), die Sie dann im Beweis verwenden können.

Vorzeichen
$$\overbrace{\left((\forall x q(x)) \rightarrow (\exists z \forall y q(y) \vee p(z, z)) \right) \vee \neg (\exists z \forall y q(y) \vee p(z, z))}^F \quad (1)$$

Abk. für Teilformeln

6 Spezifikation mit der Java Modeling Language

(4+4+3 = 11 Punkte)

Hinweis: Zur Erinnerung ist hier die Syntax einiger JML-Konstrukte wiederholt:

Allquantor (\forall T x ; *Bedingung* ; *Bedingung*)
Existenzquantor (\exists T x ; *Bedingung* ; *Bedingung*)
Summe (\sum T x ; *Bedingung* ; *Ausdruck*)
Minimum (\min T x ; *Bedingung* ; *Ausdruck*)

In dieser Aufgabe werden zweidimensionale Felder (Typ `int[][]`) verwendet. Wir nehmen an, dass der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte in diesem Feld angibt. `coll[i][j]` ist damit der Wert in der i -ten Zeile und j -ten Spalte.

Gegeben sei die Klasse `C`, die folgendermaßen definiert ist.

```
class C {
    int[][] coll;

    /*@ public normal_behaviour
       @ ensures \result <==>
       @   (\exists int i; 0<=i && i<coll.length;
       @   (\forall int j; 0<=j && j<a.length;
       @   (\exists int k; 0<=k && k<coll[i].length;
       @     a[j] == coll[i][k])))
       @ assignable \nothing;
    @*/
    boolean m(int[] a) { ... }
}
```

Aufgaben:

- a. Geben Sie in natürlicher Sprache wieder, was der Methodenvertrag für die Methode `m` besagt.

Fortsetzung: Spezifikation mit der Java Modeling Language

- b. Geben Sie eine Klasseninvariante für die Klasse `C` an, die folgendes formalisiert:

Jede Zeile in `coll` hat dieselbe Anzahl von Spalten.

```
/*@ invariant
@
@
@
@
@*/
```

- c. Die Klasse `C` soll nun um eine neue Methode `sums` erweitert werden. Ergänzen Sie dazu den unten stehenden Methodenvertrag um eine Nachbedingung, die besagt:

Die Methode liefert eine Referenz auf ein Feld zurück, dessen Länge gleich der Zahl der Zeilen von `coll` ist.

Jeder Wert in diesem Feld ist gleich der Summe der Einträge der entsprechenden Zeile in `coll`.

```
/*@ public normal_behaviour
@   requires true;
@   ensures
@
@
@
@
@
@
@
@
@
@   assignable \nothing;
@*/
int[] sums() { ... }
```

7 Büchi-Automaten und LTL

(2+3+3+1 = 9 Punkte)

Gegeben sei die aussagenlogische Signatur $\Sigma = \{a\}$.

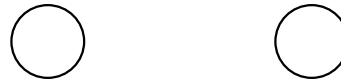
- a. Vervollständigen Sie den vorgegebenen Büchi-Automaten \mathcal{A} über dem Alphabet $V = \{\emptyset, \{a\}\}$ so, dass er die wie folgt beschriebene Sprache L akzeptiert:

$$L = \{w \in V^\omega \mid \text{es gibt genau ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } a \in w(n)\}$$

Hinweis: Es existiert eine Lösung, die mit den vorgegebenen zwei Zuständen auskommt – Lösungen mit weiteren Zuständen sind auch erlaubt.

Denken Sie daran, den Anfangszustand sowie die finalen Zustände des Automaten zu kennzeichnen.

\mathcal{A} :



- b. Geben Sie zu der in Teilaufgabe a. gegebenen Sprache L eine äquivalente Formel φ in linearer temporaler Logik (LTL) unter Verwendung der atomaren Aussage a an (d.h., es muss gelten: $L = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \varphi\}$).

Lösung: $\varphi =$ _____

- c. Nennen Sie die notwendigen Schritte, um die **Erfüllbarkeit** einer LTL-Formel F mit Hilfe von Büchi-Automaten zu überprüfen.

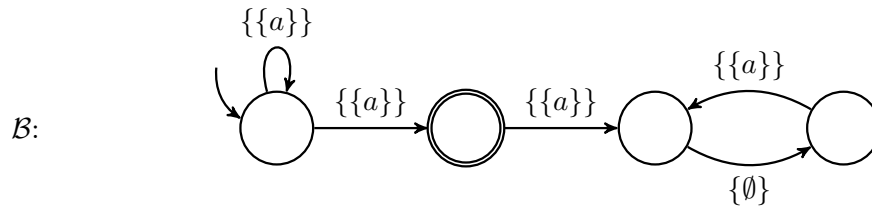
1. Man konstruiert _____

2. Es gilt: F ist genau dann erfüllbar, wenn _____

3. Dies überprüft man, indem _____

Fortsetzung: Büchi-Automaten und LTL

- d. Geben Sie zu folgendem Büchi-Automaten \mathcal{B} eine LTL-Formel ψ an, so dass $L^\omega(\mathcal{B}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models \psi\}$ gilt.



Lösung: $\psi =$ _____