Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

SS 2008

Prof. Dr. P. H. Schmitt

4. April 2008

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (12)	A2 (4)	A3 (6)	A4 (7)	A5 (8)	A6 (7)	A7 (6)	A8 (4)	A9 (6)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der erreichbaren 60 Punkte hinreichend.

Bonus: ______ **Gesamtpunkte:**

1 Zur Einstimmung (12 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1" steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)", wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar", „allgemeingültig" und „unerfüllbar".
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- p, q und r sind Prädikatssymbole, c ein Konstantensymbol, n, x und $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sind Variablen und t_1 und t_2 sind Terme der PL1.
- $\mathrm{Cl}_\forall$ bezeichnet den Allabschluss einer Formel.

a.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemeingültig	unerfüllbar
$\forall x \Big(\big(\exists x\ p(x)\big) \to p(x) \Big)$				
$[(p \land q) \to r] \ \leftrightarrow\ [(p \to r) \lor (q \to r)]$				
$\forall x \exists n (x \doteq y_1 \lor x \doteq y_n)$				
$\big[\big(\forall x\ p(x)\big) \leftrightarrow \big(\forall x\ q(x)\big)\big] \quad \leftrightarrow \quad \forall x \big(p(x) \leftrightarrow q(x)\big)$				

b.

	Richtig	Falsch
Wenn t_1 und t_2 unifizierbar sind, dann ist $\mathrm{Cl}_\forall(t_1 \doteq t_2)$ allgemeingültig.		
Wenn t_1 und t_2 unifizierbar sind und σ eine Variablenumbenennung, dann sind auch t_1 und $\sigma(t_2)$ unifizierbar.		
Wenn $\forall x\ p(x)$ allgemeingültig ist, dann ist auch $p(c)$ allgemeingültig.		
Wenn es ein geschlossenes Tableau mit der Startmarkierung $1A$ gibt, dann ist A unerfüllbar.		
Es gibt geschlossene Formeln A, B der PL1, so dass $A \to B$ allgemeingültig und A unerfüllbar ist.		

c. Sind folgende LTL-Formeln allgemeingültig, d.h. gelten sie in allen omega-Strukturen?

LTL-Formel	Ja	Nein
$\big(\Diamond(p \land \Diamond q)\big) \to \big((\Diamond q)\ \mathbf{U}\ p\big)$		
$\big(\Diamond(p \lor q)\big) \to \Diamond(p\ \mathbf{U}\ q)$		
$\Box p \leftrightarrow \Box \mathbf{X} p$		

2 Kurze KNF (4 Punkte)

Geben Sie für die Formel

$$((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4$$

eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in **kurzer konjunktiver Normalform** an.

3 Formalisieren in Prädikatenlogik (6 Punkte)

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und der Kantenmenge $E \subseteq V \times V$ heißt perfekte bipartite Paarung, wenn

1. jede Kante aus der Teilmenge V_1 in die Teilmenge V_2 führt,
2. jeder Knoten an wenigstens einer Kante beteiligt ist und
3. jeder Knoten an höchstens einer Kante beteiligt ist.

Gegeben ist die Signatur Σ, die das zweistellige Prädikatenzeichen p sowie das einstellige Prädikatensymbol q enthält. Geben Sie Formeln M_1, M_2 und M_3 über Σ an, so dass gilt:

$(D, I) \models M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \iff$ Der Graph, der durch $(D, I(p))$ definiert wird, ist eine perfekte bipartite Paarung zwischen den beiden Teilmengen $I(q)$ und $D \setminus I(q)$

$\boldsymbol{M_1}$: Jede Kante in $(D, I(p))$ geht von $I(q)$ nach $D \setminus I(q)$.

$\boldsymbol{M_2}$: Jeder Knoten in D ist an **wenigstens** einer Kante beteiligt.

$\boldsymbol{M_3}$: Jeder Knoten in D ist an **höchstens** einer Kante beteiligt.

4 Shannongraphen (2 + 5 Punkte)

Gegeben ist die aussagenlogische Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Für die aussagenlogische Formel A gelte für jede Interpretation I

$$I \models A \qquad \text{gdw.} \qquad \text{aus } I(P_i) = W \text{ folgt } I(P_j) = W \text{ für alle } j \leq i$$

a. Geben Sie eine aussagenlogische Formel A mit der geforderten Eigenschaft an.

b. Geben Sie einen reduzierten *sh*-Graphen für A bzgl. der Variablenordnung $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$ an.

5 Resolution (8 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x\; q(f(x)), \\ \forall x \forall y\big((p(x,y) \land q(x)) \to p(x, f(y))\big), \\ \forall x \forall y (p(x,y) \leftrightarrow p(f(y), x)) \end{array}\right\} \;\vdash\; \forall x (p(x,x) \to \exists y\; p(x, f(f(y))))$$

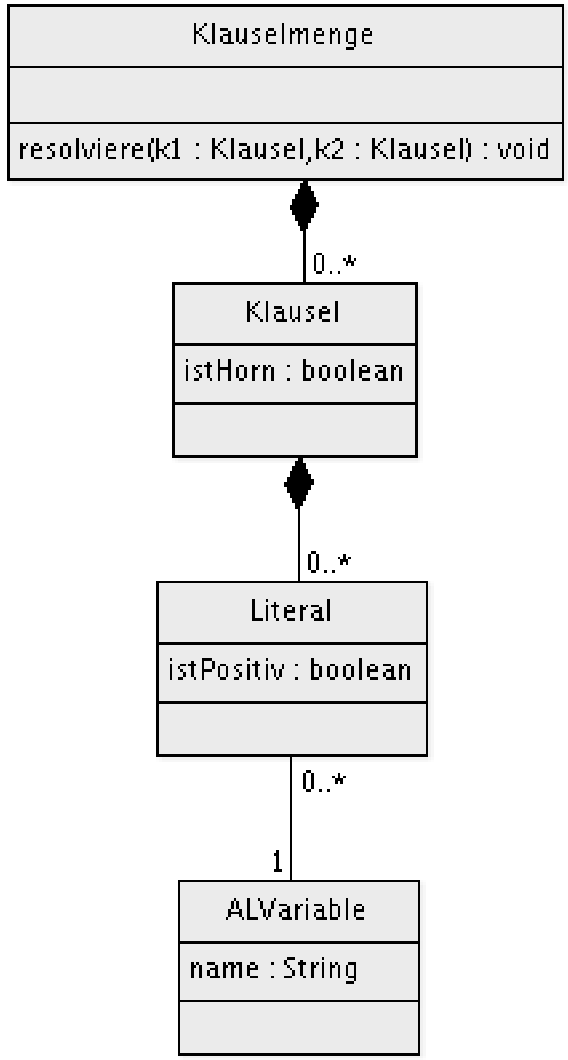
6 Aussagenlogische Hornformeln (7 Punkte)

Für eine aussagenlogische Signatur Σ und eine Interpretation I beschreibt $T(I) := \{p \in \Sigma : I(p) = W\}$ die Menge der von I zu wahr ausgewerteten Atome.

Beweisen Sie:

Sei M eine endliche, erfüllbare Menge aussagenlogischer **Hornklauseln**. Dann gibt es ein eindeutiges Modell I_0, für das für alle Interpretationen I gilt:

$$\text{Wenn } I \models M, \text{ dann gilt } T(I_0) \subseteq T(I).$$


Klauselmenge
resolviere(k1 : Klausel,k2 : Klausel) : void
0..*
Klausel
istHorn : boolean
0..*
Literal
istPositiv : boolean
0..*
1
ALVariable
name : String

7 OCL (2+2+2 Punkte)

Auf der linken Seite (auf der Rückseite zu Aufgabe **??**) finden Sie ein UML-Diagramm, das ein Metamodell für aussagenlogische Klauselmengen beschreibt.

a. Geben Sie eine OCL-Invariante an, die besagt, dass eine Klausel genau dann eine Hornklausel ist (das Feld `istHorn` ist auf `true` gesetzt), wenn sie höchstens ein positives Literal (das Feld `istPositiv` ist auf `true` gesetzt) enthält.

b. Geben Sie die Bedeutung der Vorbedingung des nachstehenden Methodenvertrags in natürlicher Sprache wieder.

```
context Klauselmenge::resolviere(k1: Klausel, k2: Klausel)
pre:  k1.literal->exists(l1 | k2.literal->exists(l2 |
                l2.istPositiv <> l1.istPositiv and l1.ALVariable = l2.ALVariable))
```

c. Geben Sie eine OCL-Nachbedingung für den oben stehenden Methodenvertrag an, die besagt:

> Nach erfolgter Resolution enthält die Menge der Klauseln neben den bereits davor enthaltenen Klauseln höchstens eine weitere.

8 Modallogik (4 Punkte)

Eine der folgenden modallogischen Formeln ist nicht in allen Kripkestrukturen, deren Zugänglichkeitsrelation eine **Äquivalenzrelation** ist, allgemeingültig.

i. $\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$

ii. $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$

iii. $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$

Geben Sie an, welche der Formeln i, ii und iii nicht allgemeingültig ist, und belegen Sie dies durch ein **Gegenbeispiel**.

9 Büchi-Automaten (3+3 Punkte)

a. Geben Sie einen Büchi-Automaten über dem Vokabular $V = \{a, b, c\}$ an, der ein omega-Wort $w \in V^\omega$, genau dann akzeptiert, wenn gilt:

i. Wenn a nur endlich oft in w vorkommt, dann kommt b unendlich oft in w vor, und

ii. wenn a unendlich oft in w vorkommt, dann kommt b nur endlich oft in w vor.

b. Beschreiben Sie, wie man entscheiden kann, ob eine LTL-Formel F allgemeingültig ist.