Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

SS 2008

Prof. Dr. P. H. Schmitt

4. April 2008

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (12)	A2 (4)	A3 (6)	A4 (7)	A5 (8)	A6 (7)	A7 (6)	A8 (4)	A9 (6)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der erreichbaren 60 Punkte hinreichend.

Bonus: ______ **Gesamtpunkte:**

1 Zur Einstimmung (12 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1" steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)", wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar", „allgemeingültig" und „unerfüllbar".
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- p, q und r sind Prädikatssymbole, c ein Konstantensymbol, n, x und $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sind Variablen und t_1 und t_2 sind Terme der PL1.
- $\mathrm{Cl}_\forall$ bezeichnet den Allabschluss einer Formel.

a.

	keine Formel der PL1	erfüllbar	allgemeingültig	unerfüllbar
$\forall x\Big((\exists x\ p(x)) \to p(x)\Big)$		X		
$[(p \wedge q) \to r] \ \leftrightarrow\ [(p \to r) \vee (q \to r)]$		X	X	
$\forall x \exists n(x \doteq y_1 \vee x \doteq y_n)$	X			
$\big[(\forall x\ p(x)) \leftrightarrow (\forall x\ q(x))\big] \ \leftrightarrow\ \forall x\big(p(x) \leftrightarrow q(x)\big)$		X		

b.

	Richtig	Falsch
Wenn t_1 und t_2 unifizierbar sind, dann ist $\mathrm{Cl}_\forall(t_1 \doteq t_2)$ allgemeingültig.		X
Wenn t_1 und t_2 unifizierbar sind und σ eine Variablenumbenennung, dann sind auch t_1 und $\sigma(t_2)$ unifizierbar.		X
Wenn $\forall x\ p(x)$ allgemeingültig ist, dann ist auch $p(c)$ allgemeingültig.	X	
Wenn es ein geschlossenes Tableau mit der Startmarkierung $1A$ gibt, dann ist A unerfüllbar.	X	
Es gibt geschlossene Formeln A, B der PL1, so dass $A \to B$ allgemeingültig und A unerfüllbar ist.	X	

c. Sind folgende LTL-Formeln allgemeingültig, d.h. gelten sie in allen omega-Strukturen?

LTL-Formel	Ja	Nein
$\big(\Diamond(p \wedge \Diamond q)\big) \to \big((\Diamond q)\ \mathbf{U}\ p\big)$	X	
$\big(\Diamond(p \vee q)\big) \to \Diamond(p\ \mathbf{U}\ q)$		X
$\Box p \leftrightarrow \Box \mathbf{X} p$		X

2 Kurze KNF (4 Punkte)

Geben Sie für die Formel

$$((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4$$

eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in **kurzer konjunktiver Normalform** an.

Einführen neuer Symbole:

$$\begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow (A_1 \leftrightarrow A_2) \\ R_2 \leftrightarrow (R_1 \leftrightarrow A_3) \\ R_2 \leftrightarrow A_4 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow (A_1 \leftrightarrow A_2) \\ R_2 \leftrightarrow (R_1 \leftrightarrow A_3) \\ R_3 \leftrightarrow (R_2 \leftrightarrow A_4) \\ R_3 \end{array}$$

Es gilt:

$$\begin{array}{ll} & R_1 \leftrightarrow (A_1 \leftrightarrow A_2) \\ \equiv & (\neg R_1 \vee (A_1 \leftrightarrow A_2)) \wedge (R_1 \vee \neg((A_1 \leftrightarrow A_2)) \\ \equiv & (\neg R_1 \vee A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg R_1 \vee \neg A_1 \vee A_2) \wedge (R_1 \vee A_1 \vee A_2) \wedge (R_1 \vee \neg A_1 \vee \neg A_2) \end{array}$$

Analoges gilt für die anderen Äquivalenzen: Die KNF ist also

$$\begin{array}{ll} & (R_1 \vee \neg A_1 \vee \neg A_2) \\ \wedge & (\neg R_1 \vee A_1 \vee \neg A_2) \\ \wedge & (\neg R_1 \vee \neg A_1 \vee A_2) \\ \wedge & (R_1 \vee A_1 \vee A_2) \\ \wedge & (R_2 \vee \neg R_1 \vee \neg A_3) \\ \wedge & (\neg R_2 \vee R_1 \vee \neg A_3) \\ \wedge & (\neg R_2 \vee \neg R_1 \vee A_3) \\ \wedge & (R_2 \vee R_1 \vee A_3) \\ \wedge & (R_2 \vee \neg A_4) \\ \wedge & (\neg R_2 \vee A_4) \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ll} & (R_1 \vee \neg A_1 \vee \neg A_2) \\ \wedge & (\neg R_1 \vee A_1 \vee \neg A_2) \\ \wedge & (\neg R_1 \vee \neg A_1 \vee A_2) \\ \wedge & (R_1 \vee A_1 \vee A_2) \\ \wedge & (R_2 \vee \neg R_1 \vee \neg A_3) \\ \wedge & (\neg R_2 \vee R_1 \vee \neg A_3) \\ \wedge & (\neg R_2 \vee \neg R_1 \vee A_3) \\ \wedge & (R_2 \vee R_1 \vee A_3) \\ \wedge & (R_3 \vee \neg R_2 \vee \neg A_4) \\ \wedge & (\neg R_3 \vee R_2 \vee \neg A_4) \\ \wedge & (\neg R_3 \vee \neg R_2 \vee A_4) \\ \wedge & (R_3 \vee R_2 \vee A_4) \\ \wedge & R_3 \end{array}$$

3 Formalisieren in Prädikatenlogik (6 Punkte)

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und der Kantenmenge $E \subseteq V \times V$ heißt perfekte bipartite Paarung, wenn

1. jede Kante aus der Teilmenge V_1 in die Teilmenge V_2 führt,
2. jeder Knoten an wenigstens einer Kante beteiligt ist und
3. jeder Knoten an höchstens einer Kante beteiligt ist.

Gegeben ist die Signatur Σ, die das zweistellige Prädikatenzeichen p sowie das einstellige Prädikatensymbol q enthält. Geben Sie Formeln M_1, M_2 und M_3 über Σ an, so dass gilt:

$(D, I) \models M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \iff$ Der Graph, der durch $(D, I(p))$ definiert wird, ist eine perfekte bipartite Paarung zwischen den beiden Teilmengen $I(q)$ und $D \setminus I(q)$

$\boldsymbol{M_1}$: Jede Kante in $(D, I(p))$ geht von $I(q)$ nach $D \setminus I(q)$.

$$\forall x \forall y \big(p(x, y) \to (q(x) \wedge \neg q(y))\big)$$

$\boldsymbol{M_2}$: Jeder Knoten in D ist an **wenigstens** einer Kante beteiligt.

$$\forall x \exists y \big(p(x, y) \vee p(y, x)\big)$$

$\boldsymbol{M_3}$: Jeder Knoten in D ist an **höchstens** einer Kante beteiligt.

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(p(x, y) \wedge p(x, z) \to y \doteq z\big) \wedge \big(p(x, y) \wedge p(z, y) \to x \doteq z\big)\Big)$$

4 Shannongraphen (2 + 5 Punkte)

Gegeben ist die aussagenlogische Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Für die aussagenlogische Formel A gelte für jede Interpretation I

$$I \models A \qquad \text{gdw.} \qquad \text{aus } I(P_i) = W \text{ folgt } I(P_j) = W \text{ für alle } j \leq i$$

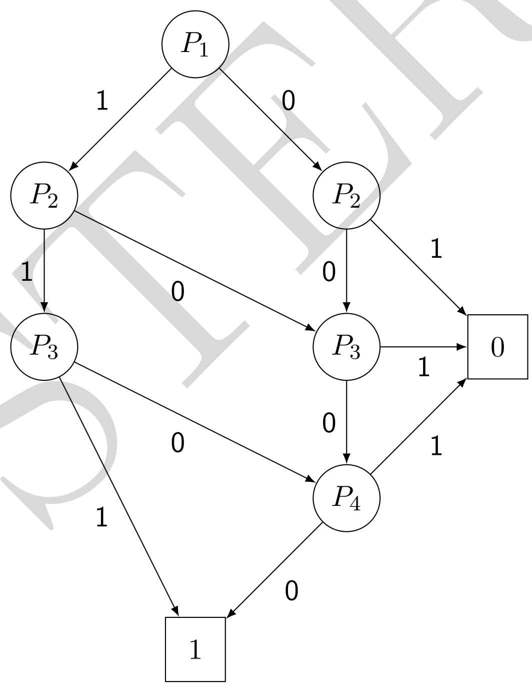
a. Geben Sie eine aussagenlogische Formel A mit der geforderten Eigenschaft an.

$$(P_4 \to P_3) \land (P_3 \to P_2) \land (P_2 \to P_1)$$

oder

$$(\neg P_1 \land \neg P_2 \land \neg P_3 \land \neg P_4) \lor (P_1 \land \neg P_2 \land \neg P_3 \land \neg P_4) \lor (P_1 \land P_2 \land \neg P_3 \land \neg P_4) \lor (P_1 \land P_2 \land P_3 \land \neg P_4) \lor (P_1 \land P_2 \land P_3 \land P_4)$$

b. Geben Sie einen reduzierten *sh*-Graphen für A bzgl. der Variablenordnung $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$ an.



5 Resolution (8 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls:

$$\left\{\begin{array}{l}\forall x\ q(f(x)),\\ \forall x \forall y\big((p(x,y)\land q(x)) \to p(x,f(y))\big),\\ \forall x\forall y(p(x,y)\leftrightarrow p(f(y),x))\end{array}\right\} \ \vdash\ \forall x(p(x,x)\to \exists y\ p(x,f(f(y))))$$

Voraussetzugen V_1, V_2, V_3 positiv und Behauptungen B negiert in Skolemnormalform.

$$\begin{array}{rl} V_1: & \forall x q(f(x)),\\ V_2: & \forall x\forall y(\neg p(x,y)\lor\neg q(x)\lor p(x,f(y))),\\ V_3: & \forall x\forall y(p(x,y)\lor\neg p(f(y),x)),\\ & \forall x\forall y(\neg p(x,y)\lor p(f(y),x)),\\ \neg B: & \neg\forall x(p(x,x)\to\exists y\ p(x,f(f(y))))\\ \mathsf{SkNF}: & \forall y(p(c,c)\land\neg p(c,f(f(y))))\ (c \text{ aus Skolemisierung hervorgegangen})\end{array}$$

Klauselform:

$$\begin{array}{ll} [1] & \{q(f(x))\}, \qquad [1'] \ \{q(f(x_2))\} \text{ (Variante)}\\ [2] & \{\neg p(x,y),\neg q(x),p(x,f(y))\},\\ [3] & \{p(x,y),\neg p(f(y),x)\},\\ [4] & \{\neg p(x,y),p(f(y),x)\},\\ [5] & \{p(c,c)\},\\ [6] & \{\neg p(c,f(f(y)))\}\end{array}$$

Resolution (Unit-Resolution):

$$\begin{array}{rlll} [7] & (1',2) & \{\neg p(f(x_2),y),p(f(x_2),f(y))\} & \sigma=\{x/f(x_2)\}\\ [8] & (4,5) & \{p(f(c),c)\} & \sigma=\{x/c,y/c\}\\ [9] & (8,7) & \{p(f(c),f(c))\} & \sigma=\{x_2/c,y/c\}\\ [10] & (9,7) & \{p(f(c),f(f(c)))\} & \sigma=\{x_2/c,y/f(c)\}\\ [11] & (10,7) & \{p(f(c),f(f(f(c))))\} & \sigma=\{x_2/c,y/f(f(c))\}\\ [12] & (11,3) & \{p(f(f(f(c))),c)\} & \sigma=\{x/f(f(f(c))),y/c\}\\ [13] & (12,3) & \{p(c,f(f(c)))\} & \sigma=\{x/c,y/f(f(c))\}\\ [14] & (13,6) & \Box & \sigma=\{y/c\}\end{array}$$

Hinweis: Um bei dieser Aufgabe die volle Punktzahl zu erreichen, genügte es, einen Teil der Resolutionsschritte anzugeben.

6 Aussagenlogische Hornformeln (7 Punkte)

Für eine aussagenlogische Signatur Σ und eine Interpretation I beschreibt $T(I) := \{p \in \Sigma : I(p) = W\}$ die Menge der von I zu wahr ausgewerteten Atome.

Beweisen Sie:

Sei M eine endliche, erfüllbare Menge aussagenlogischer **Hornklauseln**. Dann gibt es ein eindeutiges Modell I_0, für das für alle Interpretationen I gilt:

$$\text{Wenn } I \models M, \text{ dann gilt } T(I_0) \subseteq T(I).$$

Jede Hornklausel ist von der Form $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ für $n \geq 0$, A_i, B AL-Variablen, wobei B auch **1** sein darf.

Schritt 1: Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller Modelle von M. Dann ist I_S die Interpretation mit

$$I_S(p) := \begin{cases} W & \text{wenn } I(p) = W \text{ für alle } I \in \mathcal{I} \\ F & \text{sonst} \end{cases} \qquad p \in \Sigma$$

auch Modell von M. Die Interpretation ist so gewählt, dass

$$T(I_S) = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} T(I).$$

Sie heißt der **Schnitt** von $\mathcal{I}$.

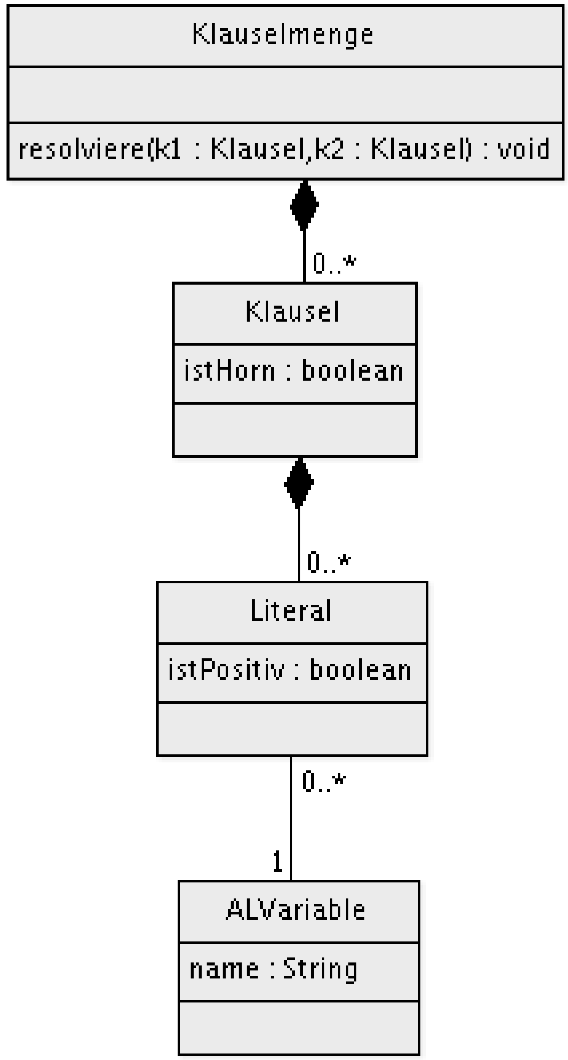
Für jede Klausel $M \ni K = (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B)$ gilt, dass $I \models K$ für alle $I \in \mathcal{I}$. Wird ein A_i von einer Interpretation *nicht* zu wahr ausgewertet, so ist ebenso $I_S(A_i) = F$ und damit $I_S(K) = W$. Sei also die Prämisse von allen Interpretationen erfüllt. Dann muss aber $I(B) = W$ für alle $I \in \mathcal{I}$ sein, damit I Modell von K sein kann. Dann wird aber auch $I_S(B) = W$ und damit $I_S \models K$ sein. Insgesamt ist die Schnittinterpretation I_S auch ein Modell von M.

Schritt 2: M ist erfüllbar, es gibt also mindestens ein Modell. Betrachtet man nun den Schnitt I_S aller Modelle, der nach Schritt 1 Modell ist, so ist offensichtlich, dass $T(I_S) \subseteq T(I)$ für alle Modelle gilt: Setze $I_0 := I_S$

Oder: Man wende den Markierungsalgorithmus für Hornklauselmengen an. Dieser Algorithmus terminiert mit dem Ergebnis erfüllbar (nach Voraussetzung) mit einer Menge $T_0 \subseteq \Sigma$ von markierten Variablen. Wählt man nun I_0 mit $T(I_0) = T_0$, so ist I_0 gerade das gesuchte Modell.

Beweis: Zu zeigen ist, dass für jedes Modell I die Menge $T(I)$ Obermenge von T_0 ist.

Angenommen, das sei nicht so. Dann gibt es ein Modell I mit einem $p \in T_0 \setminus T(I)$. Bei der Durchführung des Markierungsalgorithmus kommt es also zu der Situation, dass das erste solche p markiert werden müsste. Das geschieht, wenn alle Atome links der Implikation (die negativen) einer Klausel bereits in $T_0 \cap T(I)$ liegen. Damit diese Klausel erfüllt werden kann, muss also auch $I(p) = W$ also $p \in T(I)$ gelten. Widerspruch.


Klauselmenge
resolviere(k1 : Klausel,k2 : Klausel) : void
0..*
Klausel
istHorn : boolean
0..*
Literal
istPositiv : boolean
0..*
1
ALVariable
name : String

7 OCL (2+2+2 Punkte)

Auf der linken Seite (auf der Rückseite zu Aufgabe **??**) finden Sie ein UML-Diagramm, das ein Metamodell für aussagenlogische Klauselmengen beschreibt.

a. Geben Sie eine OCL-Invariante an, die besagt, dass eine Klausel genau dann eine Hornklausel ist (das Feld `istHorn` ist auf `true` gesetzt), wenn sie höchstens ein positives Literal (das Feld `istPositiv` ist auf `true` gesetzt) enthält.

```
context Klausel
inv:  istHorn = literal->select(l | l.istPositiv)->size() <= 1
oder
inv:  istHorn = literal->count(istPositiv) <= 1
```

b. Geben Sie die Bedeutung der Vorbedingung des nachstehenden Methodenvertrags in natürlicher Sprache wieder.

```
context Klauselmenge::resolviere(k1: Klausel, k2: Klausel)
pre:  k1.literal->exists(l1 | k2.literal->exists(l2 |
                 l2.istPositiv <> l1.istPositiv and l1.ALVariable = l2.ALVariable))
```

Zwei Klauseln k1 und k2 können in einer Klauselmenge nur dann resolviert werden, wenn eine der Klauseln ein Literal enthält, für das die andere Klausel das komplementäre Literal enthält.

c. Geben Sie eine OCL-Nachbedingung für den oben stehenden Methodenvertrag an, die besagt:

> Nach erfolgter Resolution enthält die Menge der Klauseln neben den bereits davor enthaltenen Klauseln höchstens eine weitere.

```
post: klausel->includesAll(klausel@pre) and klausel->size() <= klausel@pre->size() + 1
```

8 Modallogik (4 Punkte)

Eine der folgenden modallogischen Formeln ist nicht in allen Kripkestrukturen, deren Zugänglichkeitsrelation eine **Äquivalenzrelation** ist, allgemeingültig.

i. $\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$

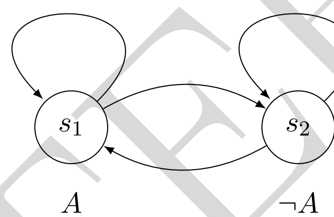
ii. $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$

iii. $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$

Geben Sie an, welche der Formeln i, ii und iii nicht allgemeingültig ist, und belegen Sie dies durch ein **Gegenbeispiel**.

ii ist die gesuchte Formel

Gegenbeispiel zu ii: Sei $K = (S, R, I)$ mit $S = \{s_1, s_2\}$, $R = S \times S$ und $I(A, s_1) = W, I(A, s_2) = F$.



Es gilt: $K, s_1 \models \Box\Diamond A$, aber es gilt nicht $K, s_2 \models \Diamond\Box A$, da weder $K, s_1 \models \Box A$ noch $K, s_2 \models \Box A$ gelten.

9 Büchi-Automaten (3+3 Punkte)

a. Geben Sie einen Büchi-Automaten über dem Vokabular $V = \{a, b, c\}$ an, der ein omega-Wort $w \in V^\omega$, genau dann akzeptiert, wenn gilt:

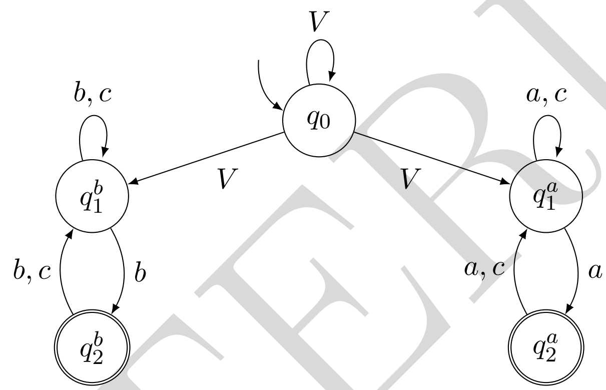
i. Wenn a nur endlich oft in w vorkommt, dann kommt b unendlich oft in w vor, und

ii. wenn a unendlich oft in w vorkommt, dann kommt b nur endlich oft in w vor.

$w \in V^\omega$ soll akzeptiert werden, entweder

- a unendlich oft und b endlich oft oder
- a endlich und b unendlich oft

in w vorkommt.



b. Beschreiben Sie, wie man entscheiden kann, ob eine LTL-Formel F allgemeingültig ist.

i. F negieren

ii. Den akzeptierenden Büchi-Automaten $\mathcal{B}(\neg F)$ zu $\neg F$ bilden

iii. Hat der Automat einen Zyklus, in dem ein Endzustand liegt?
Ja: F ist nicht allgemeingültig
Nein: F ist allgemeingültig.