Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

SS 2007

Prof. Dr. P. H. Schmitt

5. April 2007

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (12)	A2 (6)	A3 (3)	A4 (9)	A5 (4)	A6 (8)	A7 (4)	A8 (7)	A9 (7)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen !!!

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der erreichbaren 60 Punkte.

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5 + 4 + 3 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1" steht für „Prädikatenlogik erster Ordnung (mit Gleichheit $\doteq$)"; auf diese beziehen sich auch die Begriffe „erfüllbar", „allgemeingültig" und „unerfüllbar".
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- c, d sind Funktionssymbole (mit der richtigen Stelligkeit).
- p ist ein Prädikatssymbol (mit der richtigen Stelligkeit).
- x, y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

a.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemein-gültig	uner-füllbar
$(\forall x(x \doteq c) \land p(c)) \to p(d)$				
$\exists x(p(x)) \land \forall y(\neg p(y))$				
$p(\mathbf{1}) \land p(\mathbf{0})$				
$p(x) \land \neg p(y)$				
$\exists x(p(x) \to p(c))$				

b.

	Richtig	Falsch
Gegeben eine PL1-Signatur, die genau eine Konstante und ein einstelliges Prädikatssymbol enthält. Dann gibt es für diese Signatur unendlich viele verschiedene Herbrand-Interpretationen.		
Jeder Büchi-Automat, bei dem der Anfangszustand zugleich ein Endzustand ist, akzeptiert das leere Wort ϵ.		
Die OCL-Operation `sum` kann durch einen geeigneten `iterate`-Ausdruck ersetzt werden, der dieselbe Bedeutung besitzt.		
Eine Operation, die durch eine OCL precondition spezifiziert ist, darf nur in den Zuständen aufgerufen werden, in denen die precondition zu "wahr" auswertet.		

c. Sind folgende **modallogische Formeln** allgemeingültig in allen Kripke-Strukturen, bei denen der Kripke-Rahmen **reflexiv** und **transitiv** ist?

Modallogische Formel	Ja	Nein
$A \to \Diamond A$		
$\Box\Box A \to \Diamond\neg A$		
$\Diamond\Box A \to A$		

2 Prädikatenlogik (1 + 2 + 3 Punkte)

a. Gegeben sei eine Signatur, die zwei einstellige Prädikatssymbole S, T enthalte.

Geben Sie eine Formel ϕ der Prädikatenlogik **1. Stufe** an, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell von ϕ ist, wenn $I(S) \subsetneqq I(T)$. (Das Symbol $\subsetneqq$ bedeutet "echte Teilmenge".)

b. Gegeben sei eine Signatur, die eine Konstante c, ein einstelliges Prädikatssymbol S und ein zweistelliges Prädikatssymbol R enthalte.

Geben Sie eine Formel ψ der Prädikatenlogik **1. Stufe**, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell von ψ ist, wenn $I(c) \in I(S)$ und $I(S)$ unter der Relation $I(R)$ abgeschlossen ist.

c. Gegeben sei eine Signatur, die eine Konstante c, ein einstelliges Prädikatssymbol S und ein zweistelliges Prädikatssymbol R enthalte. Geben Sie eine Formel π der **Prädikatenlogik 2. Stufe** an, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell von π ist, wenn $I(S)$ **genau** $I(c)$ als auch alle davon über $I(R)$ transitiv erreichbaren Elemente enthält.

Hinweis: Verwenden Sie die Formeln aus Teilaufgabe **a.** und **b.**.

3 Unifikation (1 + 1 + 1 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Termpaare einen **allgemeinsten Unifikator** an (dabei sind a, c, f, g, h Funktionssymbole mit der richtigen Stelligkeit und w, x, y, z Variablen). Falls es keinen allgemeinsten Unifikator gibt, begründen Sie!

a.

$$f(x, y, g(a, x))$$
$$f(h(y), z, g(a, h(a)))$$

b.

$$f(h(y), z, g(y, h(x)))$$
$$f(x, y, g(a, x))$$

c.

$$h(x, c, f(g(y)))$$
$$h(f(z), z, f(w))$$

4 Modale Logik (6 + 3 Punkte)

a. Zeigen Sie, daß für einen beliebigen Kripke-Rahmen (S, R) gilt:

$(S, R, I) \models \Box\Box(A \vee B)$ für alle Interpretationsfunktionen I
impliziert
$(S, R, I) \models \Box\Box(A \wedge B)$ für alle Interpretationsfunktionen I

b. Zeigen Sie, daß **nicht** für alle Kripke-Strukturen (S, R, I) gilt:

$$(S, R, I) \models \Box\Box(A \vee B) \quad \text{impliziert} \quad (S, R, I) \models \Box\Box(A \wedge B)$$

5 Hornformeln (4 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des **Markierungsalgorithmus für Hornformeln** die Unerfüllbarkeit der aussagenlogischen Formel

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg D \vee B) \wedge D \wedge (\neg C \vee \neg E \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)$$

Geben Sie dabei an, in welcher Reihenfolge Sie die Atome markieren und begründen Sie Ihre Markierungsschritte.

6 Resolutionskalkül (8 Punkte)

Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\Big\{ \ \{\neg T(v), \neg Q(v)\}, \ \ \{T(a)\}, \ \ \{\neg P(u), Q(u), S(f(u))\}, \ \ \{P(a)\},$$
$$\{\neg P(x), Q(x), R(x, f(x))\}, \ \ \{\neg R(a, z), T(z)\}, \ \ \{\neg T(y), \neg S(y)\} \ \Big\}$$

mithilfe des Resolutionskalküls. Dabei sind a, f Funktionssymbole, P, Q, R, S, T Prädikatssymbole und u, v, x, y, z Variablen.

7 Shannon-Graphen (4 Punkte)

Geben Sie einen **reduzierten** Shannongraphen für die aussagenlogische Formel

$$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (B \vee D) \rightarrow (C \vee D)$$

an. Verwenden Sie die Variablenordnung $C < D < A < B$.

Name:
Matr.-Nr.:

8 Büchi-Automaten (3 + 4 Punkte)

Gegeben sei das Vokabular $V = \{a, b, c\}$.

a. Geben Sie einen Büchi-Automaten an, der ein Wort $w \in V^\omega$ **genau dann** akzeptiert, wenn das Teilwort cc nur **endlich oft** in w vorkommt.

b. Geben Sie einen Büchi-Automaten an, der ein Wort $w \in V^\omega$ **genau dann** akzeptiert, wenn das Teilwort ab nur **endlich oft** in w vorkommt.

9 Lineare Temporale Logik (LTL) (1 + 1 + 2 + 3 Punkte)

Sei $\Sigma = \{A, B, C\}$ eine aussagenlogische Signatur und $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur über Σ.

a. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn gilt:
$A \in \xi(3)$.

b. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn gilt:
$A \in \xi(n)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und $B \in \xi(m)$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

c. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
falls $A \in \xi(n)$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $B \in \xi(m)$.

d. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
falls $A \in \xi(n)$ und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $B \in \xi(m)$, dann gibt es ein $o \in \mathbb{N}$ mit $n \leq o < m$ und $C \in \xi(o)$.