Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

SS 2007

Prof. Dr. P. H. Schmitt

5. April 2007

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (12)	A2 (6)	A3 (3)	A4 (9)	A5 (4)	A6 (8)	A7 (4)	A8 (7)	A9 (7)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen !!!

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der erreichbaren 60 Punkte.

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5 + 4 + 3 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Ordnung (mit Gleichheit $\doteq$)“; auf diese beziehen sich auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- c, d sind Funktionssymbole (mit der richtigen Stelligkeit).
- p ist ein Prädikatssymbol (mit der richtigen Stelligkeit).
- x, y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

a.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemein-gültig	uner-füllbar
$(\forall x(x \doteq c) \land p(c)) \to p(d)$		$\times$	$\times$	
$\exists x(p(x)) \land \forall y(\neg p(y))$				$\times$
$p(\mathbf{1}) \land p(\mathbf{0})$	$\times$			
$p(x) \land \neg p(y)$		$\times$		
$\exists x(p(x) \to p(c))$		$\times$		

b.

	Richtig	Falsch
Gegeben eine PL1-Signatur, die genau eine Konstante und ein einstelliges Prädikatssymbol enthält. Dann gibt es für diese Signatur unendlich viele verschiedene Herbrand-Interpretationen.		$\times$
Jeder Büchi-Automat, bei dem der Anfangszustand zugleich ein Endzustand ist, akzeptiert das leere Wort ϵ.		$\times$
Die OCL-Operation `sum` kann durch einen geeigneten `iterate`-Ausdruck ersetzt werden, der dieselbe Bedeutung besitzt.	$\times$	
Eine Operation, die durch eine OCL precondition spezifiziert ist, darf nur in den Zuständen aufgerufen werden, in denen die precondition zu “wahr” auswertet.		$\times$

c. Sind folgende **modallogische Formeln** allgemeingültig in allen Kripke-Strukturen, bei denen der Kripke-Rahmen **reflexiv** und **transitiv** ist?

Modallogische Formel	Ja	Nein
$A \to \Diamond A$	$\times$	
$\Box\Box A \to \Diamond\neg A$		$\times$
$\Diamond\Box A \to A$		$\times$

2 Prädikatenlogik (1 + 2 + 3 Punkte)

a. Gegeben sei eine Signatur, die zwei einstellige Prädikatssymbole S, T enthalte.

Geben Sie eine Formel ϕ der Prädikatenlogik **1. Stufe** an, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell von ϕ ist, wenn $I(S) \subsetneqq I(T)$. (Das Symbol $\subsetneqq$ bedeutet "echte Teilmenge".)

Lösung:

$$\phi \equiv \forall x(S(x) \to T(x)) \land \exists x(T(x) \land \neg S(x))$$

b. Gegeben sei eine Signatur, die eine Konstante c, ein einstelliges Prädikatssymbol S und ein zweistelliges Prädikatssymbol R enthalte.

Geben Sie eine Formel ψ der Prädikatenlogik **1. Stufe**, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell von ψ ist, wenn $I(c) \in I(S)$ und $I(S)$ unter der Relation $I(R)$ abgeschlossen ist.

Lösung:

$$\psi \equiv S(c) \land \forall x \forall y(S(x) \land R(x, y) \to S(y))$$

c. Gegeben sei eine Signatur, die eine Konstante c, ein einstelliges Prädikatssymbol S und ein zweistelliges Prädikatssymbol R enthalte. Geben Sie eine Formel π der **Prädikatenlogik 2. Stufe** an, so daß eine Interpretation (D, I) genau dann Modell von π ist, wenn $I(S)$ **genau** $I(c)$ als auch alle davon über $I(R)$ transitiv erreichbaren Elemente enthält.

Hinweis: Verwenden Sie die Formeln aus Teilaufgabe **a.** und **b.**.

Lösung:

$$\pi \equiv \psi(S, c) \land \forall X(\phi(X, S) \to \neg\psi(X, c))$$

3 Unifikation (1 + 1 + 1 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Termpaare einen **allgemeinsten Unifikator** an (dabei sind a, c, f, g, h Funktionssymbole mit der richtigen Stelligkeit und w, x, y, z Variablen). Falls es keinen allgemeinsten Unifikator gibt, begründen Sie!

a.

$$f(x, y, g(a, x))$$
$$f(h(y), z, g(a, h(a)))$$

Lösung:

Ein allgemeinster Unifikator ist $\{x/h(a), y/a, z/a\}$.

b.

$$f(h(y), z, g(y, h(x)))$$
$$f(x, y, g(a, x))$$

Lösung:

Nicht unifizierbar, da die Teilterme x und $h(x)$ nicht unifizierbar sind (occur check).

c.

$$h(x, c, f(g(y)))$$
$$h(f(z), z, f(w))$$

Lösung:

Ein allgemeinster Unifikator ist $\{x/f(c), z/c, w/g(y)\}$.

4 Modale Logik (6 + 3 Punkte)

a. Zeigen Sie, daß für einen beliebigen Kripke-Rahmen (S, R) gilt:

$(S, R, I) \models \Box\Box(A \vee B)$ für alle Interpretationsfunktionen I

impliziert

$(S, R, I) \models \Box\Box(A \wedge B)$ für alle Interpretationsfunktionen I

Lösung:

Sei $\mathcal{K} = (S, R, I)$.
$\mathcal{K} \models \Box\Box(A \vee B)$ für alle $I \Rightarrow$
$s \models \Box\Box(A \vee B)$ für alle I und alle $s \in S \Rightarrow$
$t \models \Box(A \vee B)$ für alle I und alle $t \in S$ mit $R(s, t) \Rightarrow$
$R(t, u)$ für kein $u \in S \Rightarrow$
$t \models \Box(A \wedge B)$ für alle I und alle $t \in S$ mit $R(s, t) \Rightarrow$
$s \models \Box\Box(A \wedge B)$ für alle I und alle $s \in S \Rightarrow$
$\mathcal{K} \models \Box\Box(A \wedge B)$ für alle I.

b. Zeigen Sie, daß **nicht** für alle Kripke-Strukturen (S, R, I) gilt:

$(S, R, I) \models \Box\Box(A \vee B)$ impliziert $(S, R, I) \models \Box\Box(A \wedge B)$

Lösung:

Wir betrachten die Kripke-Struktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ mit

- $S = \{s_0, s_1, s_2\}$
- $R = \{(s_0, s_1), (s_1, s_2)\}$
- $I(A, s) = \mathbf{W}$ und $I(B, s_i) = \mathbf{F}$ für alle $s \in S$

In $\mathcal{K}$ gilt: $\mathcal{K} \models \Box\Box(A \vee B)$ und $\mathcal{K} \not\models \Box\Box(A \wedge B)$, da $s \models \Box\Box(A \vee B)$ für alle $s \in S$ und $s_0 \not\models \Box\Box(A \wedge B)$.

5 Hornformeln (4 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des **Markierungsalgorithmus für Hornformeln** die Unerfüllbarkeit der aussagenlogischen Formel

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg D \vee B) \wedge D \wedge (\neg C \vee \neg E \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)$$

Geben Sie dabei an, in welcher Reihenfolge Sie die Atome markieren und begründen Sie Ihre Markierungsschritte.

Lösung:

Schritt 1: Umformung der einzelnen Disjunktionsglieder in Implikationen

$$(A \wedge B \wedge C \to \mathbf{0}) \wedge (D \to A) \wedge (A \wedge D \to B) \wedge D \wedge (C \wedge E \wedge A \to \mathbf{0}) \wedge (B \wedge A \to C)$$

Schritt 2: Anwendung des Markierungsalgorithmus

1. Markiere Faktum D
2. Markiere A wegen $D \to A$
3. Markiere B wegen $A \wedge D \to B$
4. Markiere C wegen $B \wedge A \to C$
5. Terminiere mit "unerfüllbar" wegen $A \wedge B \wedge C \to \mathbf{0}$

6 Resolutionskalkül (8 Punkte)

Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\Big\{\ \{\neg T(v), \neg Q(v)\},\ \ \{T(a)\},\ \ \{\neg P(u), Q(u), S(f(u))\},\ \ \{P(a)\},$$
$$\{\neg P(x), Q(x), R(x, f(x))\},\ \ \{\neg R(a, z), T(z)\},\ \ \{\neg T(y), \neg S(y)\}\ \Big\}$$

mithilfe des Resolutionskalküls. Dabei sind a, f Funktionssymbole, P, Q, R, S, T Prädikatssymbole und u, v, x, y, z Variablen.

Lösung:

(1)	$\{\neg T(v), \neg Q(v)\}$
(2)	$\{T(a)\}$
$(3; 1, 2)$ $\{v/a\}$	$\{\neg Q(a)\}$
(4)	$\{\neg P(u), Q(u), S(f(u))\}$
(5)	$\{P(a)\}$
$(6; 4, 5)$ $\{u/a\}$	$\{Q(a), S(f(a))\}$
$(7; 3, 6)$	$\{S(f(a))\}$
(8)	$\{\neg T(y), \neg S(y)\}$
$(9; 7, 8)$ $\{y/f(a)\}$	$\{\neg T(f(a))\}$
(10)	$\{\neg R(a, z), T(z)\}$
$(11, 9, 10)$ $\{z/f(a)\}$	$\{\neg R(a, f(a))\}$
(12)	$\{\neg P(x), Q(x), R(x, f(x))\}$
$(13; 11, 12)$ $\{x/a\}$	$\{\neg P(a), Q(a)\}$
$(14; 5, 13)$	$\{Q(a)\}$
$(15; 3, 14)$ $\{v/a\}$	$\square$

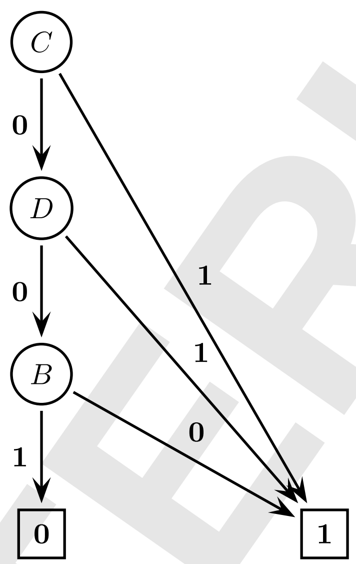
7 Shannon-Graphen (4 Punkte)

Geben Sie einen **reduzierten** Shannongraphen für die aussagenlogische Formel

$$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (B \vee D) \rightarrow (C \vee D)$$

an. Verwenden Sie die Variablenordnung $C < D < A < B$.

Lösung:

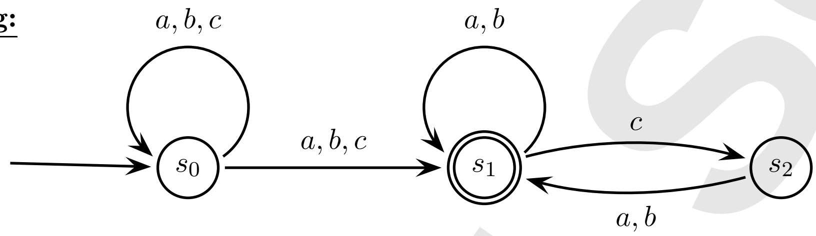


8 Büchi-Automaten (3 + 4 Punkte)

Gegeben sei das Vokabular $V = \{a, b, c\}$.

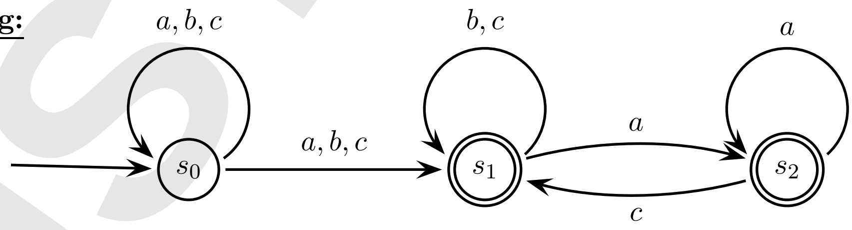
a. Geben Sie einen Büchi-Automaten an, der ein Wort $w \in V^\omega$ **genau dann** akzeptiert, wenn das Teilwort cc nur **endlich oft** in w vorkommt.

Lösung:



b. Geben Sie einen Büchi-Automaten an, der ein Wort $w \in V^\omega$ **genau dann** akzeptiert, wenn das Teilwort ab nur **endlich oft** in w vorkommt.

Lösung:



9 Lineare Temporale Logik (LTL) (1 + 1 + 2 + 3 Punkte)

Sei $\Sigma = \{A, B, C\}$ eine aussagenlogische Signatur und $\mathcal{R} = (\mathbb{N}, <, \xi)$ eine omega-Struktur über Σ.

a. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn gilt:
$A \in \xi(3)$.

Lösung:

$F = \mathbf{X}\,\mathbf{X}\,\mathbf{X}\,A$

b. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn gilt:
$A \in \xi(n)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und $B \in \xi(m)$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

Lösung:

$F = \Box\Diamond A \wedge \Box\Diamond B$

c. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
falls $A \in \xi(n)$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $B \in \xi(m)$.

Lösung:

$F = \Box(A \rightarrow \mathbf{X}\,\Diamond B)$

d. Geben Sie eine LTL-Formel F über Σ an mit der Eigenschaft:

$\xi \models F$
genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
falls $A \in \xi(n)$ und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $B \in \xi(m)$, dann gibt es ein $o \in \mathbb{N}$ mit $n \leq o < m$ und $C \in \xi(o)$.

Lösung:

$F = \Box\Big(A \rightarrow \big(C \vee \mathbf{X}\,\neg(\neg C\,\mathrm{U}\,B)\big)\Big)$