Klausur Formale Systeme

Fakultät für Informatik

WS 2015/2016

Prof. Dr. Bernhard Beckert

4. März 2016

Vorname: **Vorname**
Name: **Familienname**
Matrikel-Nr.: **Matr.-Nr.**

Platz-Nr.: **Hörsaal** **Sitzplatz**
Code: **Nonce**

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

A1 (14)	A2 (5)	A3 (4)	A4 (10)	A5 (11)	A6 (8)	A7 (8)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5+5+2+2 = 14 Punkte)

a. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle alles Zutreffende an.

Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, **für jede falsche Antwort wird ein *halber Punkt* abgezogen!** (Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)“, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- p, q, s und t sind Prädikatensymbole, f ist ein Funktionssymbol, c ist ein Konstantensymbol und x, y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

	<u>keine</u> Formel der PL1	allgemeingültig	erfüllbar, aber nicht allgemeingültig	unerfüllbar
$\forall x\, (\neg(x \doteq c))$				
$\forall x \big(q(x,c) \land f(x) \to q(f(x),c)\big)$				
$\big((\neg s \leftrightarrow \neg t) \leftrightarrow s\big) \leftrightarrow t$				
$\big(\forall x\, f(x) \doteq x\big) \land \big(\forall x\, p(f(x))\big) \land \neg p(c)$				
$\exists x \forall y \big(p(x) \land p(y)\big)$				

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, **für falsche Antworten wird *ein Punkt* abgezogen**. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Enthält jede Klausel einer Klauselmenge K ein negatives Literal, so ist die Klauselmenge K erfüllbar.		
Sei A eine beliebige geschlossene Formel der PL1. Dann gilt: Eine Interpretation $\mathcal{D}$ ist genau dann ein Modell von $\neg A$, wenn $\mathcal{D}$ kein Modell von A ist.		
Es existieren zwei Shannon-Graphen G_1, G_2, so dass für alle aussagenlogischen Formeln mit genau einer Variablen der zugehörige reduzierte Shannon-Graph G_1 oder G_2 ist.		
Die modallogischen Formeln $\Diamond(P \lor Q)$ und $(\Diamond P) \land (\Diamond Q)$ sind logisch äquivalent.		
Jedes Reduktionssystem $(D, \succ)$, bei dem alle Elemente $s \in D$ irreduzibel sind, ist lokal konfluent.		

Fortsetzung 1 Zur Einstimmung

c. Was ist die charakteristische Eigenschaft von Herbrand-Interpretationen im Vergleich zu beliebigen prädikatenlogischen Interpretationen?

d. Welche Art von prädikatenlogischen Formeln besitzen nach dem Satz von Herbrand ein Herbrand-Modell?

2 Kalkülwahl (5 Punkte)

Im Informatik-Unterricht in der Schule soll eine Einführung in Aussagenlogik gegeben werden. Dabei soll auch ein Kalkül vorgestellt werden.

Welcher Kalkül sollte Ihrer Einschätzung nach vorgestellt werden?

Begründen Sie Ihre Antwort!

<u>Hinweis:</u> Die volle Punktzahl wird für diese Aufgabe erreicht, wenn ein günstiger Kalkül gewählt wird und mindestens zwei stichhaltige Argumente für die Wahl gegeben werden.

Kalkül:

Begründung:

3 Unifikation (2+2 = 4 Punkte)

Seien

- g ein zweistelliges Funktionssymbol,
- h ein einstelliges Funktionssymbol,
- a ein nullstelliges Funktionssymbol (Konstante)
- x, y, z, u Variablen.

Geben Sie für die folgenden Termmengen einen allgemeinsten Unifikator μ an (als *eine* Substitution und nicht als Verkettung von Substitutionen). Falls es keinen allgemeinsten Unifikator gibt, begründen Sie, warum es keinen gibt!

a. $g(z, g(u, x))$
$g(h(y), g(u, z))$
$g(h(h(a)), g(z, h(y)))$

---

b. $g(z, g(u, x))$
$g(h(y), g(u, y))$
$g(h(h(u)), g(z, h(z)))$

---

4 Formalisieren in PL1 (2+2+2+4 = 10 Punkte)

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit. Benutzen Sie dafür die jeweils angegebenen interpretierten Symbole.

a. Hunde, die bellen, beißen nicht.
Prädikate: $hund(\cdot), bellt(\cdot), beißt(\cdot)$.

---

b. Es ist nicht alles Gold, was glänzt.
Prädikate: $gold(\cdot), glänzt(\cdot)$.

---

c. Angriff ist die beste Verteidigung.
Konstante: *angriff*
Prädikate: $ist\_verteidigung(\cdot), besser(\cdot, \cdot)$.
Sie können davon ausgehen, dass die Interpretation von $besser(\cdot, \cdot)$ reflexiv ist.

---

d. Die Aussage „alles hat ein Ende“ ist mehrdeutig. Das Wort „ein“ kann z.B. „mindestens ein“, „genau ein“ oder „ein und dasselbe“ bedeuten. Eine mögliche Formalisierung der Aussage „alles hat ein Ende“ ist

$$\exists e. \forall x.\ ende\_von(e, x)\ \ .$$

Geben Sie zwei weitere Formalisierungen von „alles hat ein Ende“ an, so dass alle drei Formalisierungen semantisch verschieden sind. Benutzen Sie das Prädikatssymbol $ende\_von(\cdot, \cdot)$.

---

5 Tableaukalkül (8+3 = 11 Punkte)

a. Vervollständigen und schließen Sie den folgenden Tableau-Beweis.

Notieren Sie dabei:

- den Regeltyp ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) und die Formel, auf die eine Regel angewendet wird,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- sowie die schließende Substitution.

$$\begin{array}{c}
1\ p(c) \quad (1) \\
| \\
1\ \neg q(f(c)) \quad (2) \\
| \\
1\ \forall x\ p(f(x)) \quad (3) \\
| \\
1\ \forall y\ \Big(\neg p(y) \vee \big(q(y) \vee \exists x\ \neg p(f(x))\big)\Big) \quad (4)
\end{array}$$

Fortsetzung 5 Tableaukalkül

b. Geben Sie für den aussagenlogischen XOR-Operator ($\oplus$) korrekte und vollständige Tableau-Regeln an.
Zur Erinnerung: $A \oplus B$ ist logisch äquivalent zu $A \leftrightarrow \neg B$

$1(A \oplus B)$ $\qquad\qquad$ $0(A \oplus B)$

6 Spezifikation mit der Java Modeling Language (2+3+3 = 8 Punkte)

Folgende in Java implementierte Klasse sei gegeben:

```
class CachedBigNumArray {
   int[] cache;
   int[] data;
   // ...
}
```

Dabei soll das Array `cache` einen direkten Zugriff auf die größten Elemente aus dem Array `data` ermöglichen.

a. Formalisieren Sie eine Klasseninvariante für die Klasse `CachedBigNumArray`, die folgenden Sachverhalt beschreibt:

> Die Länge des Arrays `cache` ist wenigstens die Hälfte der Länge des Arrays `data` und höchstens die volle Länge von `data`.

```
/*@ invariant
  @
  @*/
```

b. Formalisieren Sie eine Klasseninvariante für die Klasse `CachedBigNumArray`, die folgenden Sachverhalt beschreibt:

> Das Array `cache` enthält keinen Wert mehr als einmal.

```
/*@ invariant
  @
  @
  @
  @
  @
  @*/
```

Fortsetzung 6 Spezifikation mit der Java Modeling Language

c. Geben Sie die Bedeutung der folgenden Klasseninvariante in natürlicher Sprache wieder:

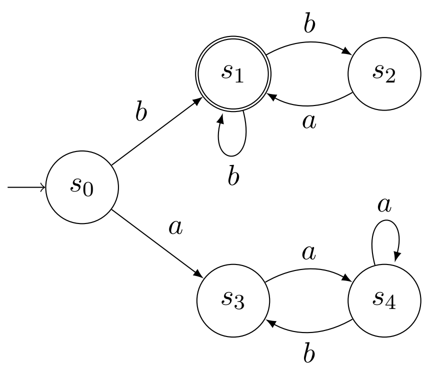
```
/*@ invariant
  @ (\forall int i; 0<=i && i<cache.length;
  @   (\forall int j; 0<=j && j<data.length;
  @     data[j] > cache[i] ==>
  @       (\exists int k; 0<=k && k<cache.length; cache[k] == data[j])
  @   )
  @ );
  @*/
```

7 Büchi-Automaten und LTL (3+(2+3) = 8 Punkte)

a. Es sei das Alphabet $V = \{a, b\}$ gegeben. Geben Sie einen ω-regulären Ausdruck R über V an, so dass R genau die Menge der ω-Wörter über V beschreibt, die folgender Büchi-Automat A akzeptiert.

(Gesucht ist also R mit $L(R) = L(A)$.)

$A =$



$R =$ ______________________________

b. Eine Industrieanlage zur Verarbeitung von Werkstücken besitze drei Sensoren W, G, S, mit denen weiße (W), graue (G) und schwarze (S) Werkstücke am Eingang der Anlage erkannt und unterschieden werden können.

Formalisieren Sie die folgenden natürlichsprachigen Sachverhalte in LTL. Nutzen Sie dabei W, G, S als aussagenlogische Variablen.

i. Niemals ist mehr als eines der Signale W, G und S gleichzeitig wahr.

____

ii. Auf ein schwarzes Werkstück folgt niemals direkt ein weißes.

Beachten Sie: Zwischen zwei Werkstücken kann es Zeiträume geben, in denen keiner der drei Sensoren ein Werkstück erkennt.

____