Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

WS 2008/2009

Prof. Dr. Bernhard Beckert

19. Februar 2009

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte kleben Sie hier Ihren Platzaufkleber auf!

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (15)	A2 (6)	A3 (5)	A4 (8)	A5 (10)	A6 (9)	A7 (7)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der erreichbaren 60 Punkte hinreichend.

Bonus: ______ **Gesamtpunkte:**

1 Zur Einstimmung (4+5+3+3 = 15 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der vier Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)“, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- p, q, r, s und t sind Prädikatssymbole, f ist ein Funktionssymbol, und x und y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

a.

	keine Formel der PL1	erfüllbar	allgemein-gültig	uner-füllbar
$\big(\forall x \exists y \big(p(x) \to q(y)\big)\big) \leftrightarrow \big((\exists x\, p(x)) \to (\exists y\, q(y))\big)$				
$\big((r \wedge s) \to t\big) \to s$				
$\forall x \big(p(x) \to q(p(x))\big)$				
$\exists x \big(p(x) \to p(f(x))\big)$				

b.

	Richtig	Falsch
Die modallogische Formel $\Diamond\mathbf{1}$ charakterisiert die endlosen Kripkerahmen.		
Zu jedem Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ gibt es einen *deterministischen* Büchi-Automaten $\mathcal{A}'$, so dass $L^\omega(\mathcal{A}) = L^\omega(\mathcal{A}')$ gilt.		
Für jede geschlossene prädikatenlogische Formel G gilt: Es gibt ein Modell für G oder für das Negat von G oder für beide.		
Das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik ist entscheidbar.		
Für alle PL1-Formeln G, G_1, G_2 gilt: Wenn G sowohl mit G_1 als auch mit G_2 unifizierbar ist, dann sind auch G_1 und G_2 miteinander unifizierbar.		

1 Zur Einstimmung *(Fortsetzung)*

c.

	Ja	Nein
Für alle aussagenlogischen Klauselmengen M gilt: Falls jede Klausel in M mindestens ein positives Literal enthält, dann ist M erfüllbar.		
Für alle aussagenlogischen Klauselmengen M gilt: Falls jede aussagenlogische Variable, die in M vorkommt, sowohl negiert als auch nicht negiert in M auftritt, dann ist M unerfüllbar.		
Jede 2KNF-Formel (Kromformel) ist auch eine Hornformel.		

d. Sind folgende modallogische Formeln allgemeingültig, d.h., gelten sie in allen Kripkestrukturen?

Modallogische Formel	Allgemeingültig	Nicht allgemeingültig
$(\Box A \wedge \Diamond\Diamond A) \rightarrow \Box\Diamond A$		
$\Box A \vee \Diamond(\neg A \vee B)$		
$\Box\big((A \wedge \Diamond B) \rightarrow A\big)$		

2 Shannongraphen (6 Punkte)

Gegeben sei die aussagenlogische Signatur $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3\}$ mit der Variablenordnung $P_1 < P_2 < P_3$, und die aussagenlogische Formel G habe die folgende Eigenschaft:

> G wird *genau* in denjenigen Interpretation $I : \Sigma \to \{W, F\}$ zu wahr ausgewertet,
> die mindestens zwei Variablen aus Σ mit W (wahr) belegen.

Geben Sie den reduzierten Shannongraphen für G an.

3 Unifikation und Substitution (4+1 = 5 Punkte)

Gegeben sei eine Signatur, die das Funktionssymbol f, das Konstantensymbol c und das Prädikatensymbol p enthält; x_1, x_2 und x_3 sind Variablen.

a. Geben Sie für die folgenden beiden Formelpaare jeweils an, ob sie unifizierbar sind.
Wenn ja, geben Sie zusätzlich an:

– einen allgemeinsten Unifikator,

– die Ergebnisformel

i. $p(x_1, x_2, x_3), \quad p(f(x_2), f(x_3), c)$

ii. $p(x_1, x_2, x_3), \quad p(f(x_2), f(x_3), x_1)$

b. Geben Sie ein Beispiel für eine prädikatenlogische Formel φ und eine Substitution σ an, so dass σ *nicht* kollisionsfrei für φ ist.

$\varphi =$

$\sigma =$

4 Semantik der Prädikatenlogik (6+2 = 8 Punkte)

Gegeben sei folgende prädikatenlogische Formel G:

$$\begin{array}{ll} & \forall x \exists y\, r(x,y) \\ \wedge & \forall x \exists y\, \neg r(x,y) \\ \wedge & \forall x \forall y \forall z \big((r(x,y) \wedge r(y,z)) \rightarrow r(x,z) \big) \end{array}$$

a. Die Formel G ist erfüllbar.
Geben Sie von allen Modellen von G ein solches Modell (D, I) an, bei dem die Anzahl der Elemente des Universums D **minimal** ist.

Hinweis: Sie können dazu einen Graphen mit Knotenmenge D und Kantenmenge $I(r)$ skizzieren.

b. Wir betrachten nun die Formel G':

$$G \;\wedge\; \forall x\, \neg r(x,x)$$

Geben Sie eine Interpretation (D', I') mit $D' = \mathbb{Z}$ an, die ein Modell von G' ist.

5 Resolutionskalkül (10 Punkte)

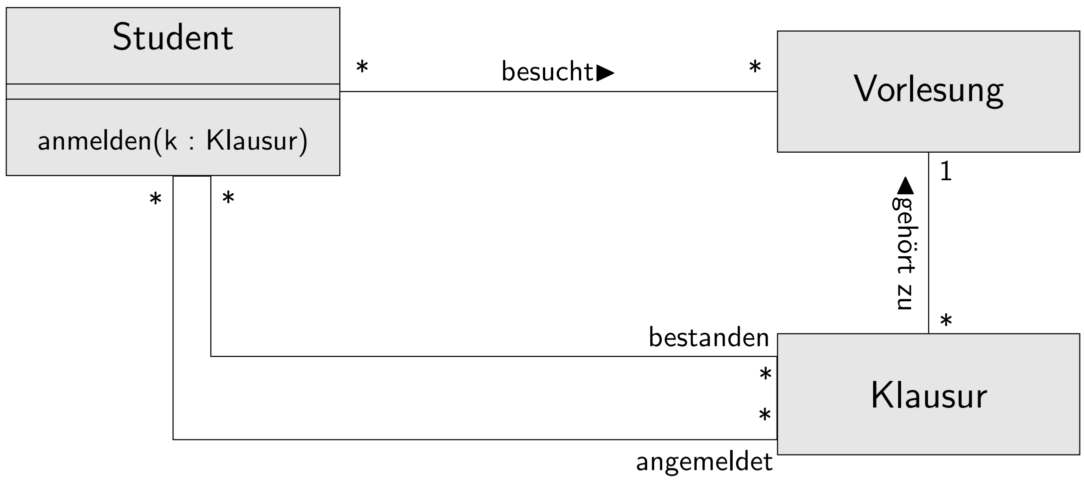
Gegeben sei eine Signatur Σ, die die Konstante a, das einstellige Funktionssymbol s und das dreistellige Prädikatensymbol p enthält.
Ferner sei folgende Formel G über Σ gegeben:

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall x\, p(a, x, x) \\
\wedge & \forall u \forall v \forall w\, (p(u, v, w) \rightarrow p(s(u), v, s(w)) \\
\wedge & \neg p(s(s(a)), s(a), s(s(s(a))))
\end{array}
$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküles, dass G unerfüllbar ist.

Notieren Sie Ihren Beweis so, dass bei jeder neu entstehenden Klausel klar erkennbar ist, aus welchen Elternklauseln sie entsteht.

UML-Diagramm zu Aufgabe 6



Übersicht über wichtige OCL-Operationen

Folgende Operationen sind auf alle Gesamtheiten (Mengen, Multimengen und Listen) anwendbar.

Operation	**Ergebnis** (bei Anwendung auf M)
`size()`	die Anzahl der Elemente in M.
`including(o)`	die Gesamtheit, die M erweitert um o entspricht.
`collect(v|exp)`	die Gesamtheit, die entsteht, wenn der Audruck *exp* für jedes Element in M ausgewertet wird.
`intersection(N)`	der Durchschnitt von M und N.
`union(N)`	die Vereinigung von M und N.
`includes(o)`	wahr genau dann, wenn o ein Element in M ist.
`includesAll(N)`	wahr genau dann, wenn jedes Element n der Gesamtheit N auch ein Element in M ist.
`isEmpty()`	wahr genau dann, wenn M kein Element enthält.
`exists(v|b)`	wahr genau dann, wenn es ein Element v in M gibt, so dass dafür der boolesche Ausdruck b zu wahr auswertet.
`forAll(v|b)`	wahr genau dann, wenn für jedes Element v in M der boolesche Ausdruck b zu wahr auswertet.
`select(v|b)`	die Gesamtheit der Elemente v von M, die b erfüllen.

6 Object Constraint Language (3+3+3 = 9 Punkte)

Auf der linken Seite ist ein UML-Klassendiagramm abgebildet. Es modelliert den Zusammenhang zwischen Vorlesungen, Studenten und Klausuren: Ein Student besucht Vorlesungen; jeder Vorlesung sind Klausuren zugeordnet; und jeder Student kann zu Klausuren angemeldet sein und kann Klausuren bestanden haben.

a. Geben Sie eine OCL-Invariante für die Klasse `Student` an, die folgenden Sachverhalt formalisiert:

> Man kann nur dann zu einer Klausur einer Vorlesung angemeldet sein, wenn man für dieselbe Vorlesung nicht bereits eine Klausur bestanden hat.

b. Geben Sie die Bedeutung der folgenden OCL-Invarianten in natürlicher Sprache wieder.

```
context Student
   inv: angemeldet.vorlesung->forAll(v | self.vorlesung->includes(v))
```

c. Die Klasse Student enthält die Methode `anmelden(k : Klausur)`. Geben Sie für diese einen Methodenvertrag an, der besagt:

> Ein Student darf sich für die Klausur `k` nur anmelden, wenn er für die zu `k` gehörige Vorlesung noch keine Klausur bestanden hat.
> Nach der ausgeführten Anmeldung ist er für `k` angemeldet, und der Anmeldestatus für alle anderen Klausuren bleibt, wie er vor dem Vorgang war.

7 Büchi-Automaten / LTL (5+2 = 7 Punkte)

a. Gegeben sei ein endliches Alphabet V, das wenigstens die beiden Symbole a und b enthält.

Geben Sie einen Büchi-Automaten $\mathcal{B}$ an, so dass die von $\mathcal{B}$ akzeptierte Sprache $L^\omega(\mathcal{B})$ genau diejenigen Wörter $w \in V^\omega$ enthält, für die gilt:

a kommt unendlich oft in w vor, **genau dann** wenn b unendlich oft in w vorkommt.

b. Gegeben sei die Signatur $\Sigma = \{p, q\}$.

Geben Sie einen Büchiautomaten über $V = \mathbb{P}(\Sigma)$ an, der eine ω-Struktur genau dann akzeptiert, wenn sie die folgende LTL-Formel erfüllt:

$$\mathbf{X}(p\,\mathbf{U}\,q)$$

Verwenden Sie die übliche Mengenschreibweise aus der Vorlesung.