Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

WS 2007/2008

Prof. Dr. P. H. Schmitt

18. Februar 2008

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (11)	A2 (6)	A3 (3)	A4 (7)	A5 (7)	A6 (8)	A7 (8)	A8 (4)	A9 (6)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der erreichbaren 60 Punkte.

Bonus: ______ **Gesamtpunkte:**

1 Zur Einstimmung (11 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1" steht für „Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit $\doteq$)", wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde. Auf diese beziehen sich in Teilaufgabe a. auch die Begriffe „erfüllbar", „allgemeingültig" und „unerfüllbar".
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- p und q sind Prädikatssymbole, c und f sind Funktionssymbole, und r, t, x, y und z sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

a.

	<u>keine</u> Formel der PL1	erfüllbar	allgemein-gültig	uner-füllbar
$\big[\forall x \exists y \big(p(x) \to q(y)\big)\big] \leftrightarrow \big[(\exists r\ p(r)) \to (\exists t\ q(t))\big]$				
$\forall x \big[p(x) \to p(p(x))\big] \to p(p(c))$				
$\forall x \exists y \big[\neg(x \doteq y)\big]$				
$\forall x \forall y \big(p(f(x,y))\big) \wedge \exists z \big(\neg p(f(z,z))\big)$				

b.

	Richtig	Falsch
Sei $\mathcal{K} = (S, R, I)$ eine Kripkestruktur mit $\mathcal{K} \models \Box p \to \Box\Box p$. Daraus folgt, dass R transitiv ist.		
In der Aussagenlogik gilt: $p \wedge q$ ist unerfüllbar, genau dann wenn $p \to \neg q$ allgemeingültig ist.		
Für jede unerfüllbare Klauselmenge M gibt es eine Ableitung der leeren Klausel $M \vdash_{\text{lin.Res}} \Box$ mit linearer Resolution.		
Das Hinzufügen einer neuen Regel zum Tableaukalkül für die Prädikatenlogik kann sowohl Korrektheit als auch Vollständigkeit verletzen.		

c.

Sind folgende LTL-Formeln allgemeingültig, d.h. gelten sie in allen omega-Strukturen?

LTL-Formel	Ja	Nein
$((\mathbf{X}\neg p)\ \mathbf{U}\ p)$		
$\Box(p\ \mathbf{U}\ q) \to \Box(p \vee q)$		
$\mathbf{X}(p\ \mathbf{U}\ q) \to ((\mathbf{X}p)\ \mathbf{U}\ (\mathbf{X}q))$		

2 Formalisieren in Aussagenlogik / Davis-Putnam (3+3 Punkte)

a. Gegeben sei eine Landkarte mit L Ländern, die mit den Zahlen von 0 bis $L-1$ bezeichnet werden. Die binäre Relation $Na(i,j)$ trifft auf zwei Länder i und j zu ($0 \leq i,j < L$), wenn sie benachbart sind. Die Landkarte soll nun mit den **drei** Farben *rot*, *grün* und *blau* so eingefärbt werden, dass keine zwei benachbarten Länder dieselbe Farbe erhalten.

Geben Sie eine Menge F von aussagenlogischen Formeln an, so dass F genau dann erfüllbar ist, wenn eine Färbung der geforderten Art möglich ist.

b.

$$M := \big\{\{A, \neg B, C, \neg D\}, \{B, \neg D\}, \{C, D\}, \{\neg A, \neg D\}, \{\neg C, D\}, \{A, \neg C\}, \{A, B, \neg C\}\big\}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Davis-Putnam-Loveland-Algorithmus, dass die Menge M an aussagenlogischen Klauseln unerfüllbar ist.

3 Formalisieren in Prädikatenlogik (3 Punkte)

Gegeben ist die prädikatenlogische Signatur $\Sigma_{\mathbb{N}}$, die das Konstantensymbol *eins*, das zweistellige Funktionszeichen *mul* und das binäre Relationszeichen *kl* enthält. Die Interpretation $(\mathbb{N}, I_{\mathbb{N}})$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} I_{\mathbb{N}}(eins) & = & 1 \\ I_{\mathbb{N}}(mul)(a,b) & = & a \cdot b \\ I_{\mathbb{N}}(kl) & = & \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a < b\} \end{array}$$

Hinweis: 1 ist keine Primzahl.

a. Geben Sie eine prädikatenlogische Formel φ_{pr}, die eine freie Variable x enthält und für die gilt:

$$(\mathbb{N}, I_{\mathbb{N}}, \beta_x^p) \models \varphi_{pr} \iff p \text{ ist Primzahl}$$

b. Geben Sie eine Formel an, die folgenden Sachverhalt formalisiert:

Es gibt unendlich viele Primzahlen in $\mathbb{N}$.

Sie können dafür die Formel φ_{pr} aus Teilaufgabe a. als Abkürzung verwenden.

4 Skolemnormalform (5+2 Punkte)

a. Transformieren Sie folgende Formel K der Prädikatenlogik schrittweise in Skolemnormalform.

$$K \ := \ \Big[\exists x\big((\forall y\ p(x,y)) \to \forall y\ q(y,x)\big)\Big] \to \forall u \exists w\ p(f(u,w),u)$$

Hinweis: Bei einer Formel in Skolemnormalform ist die Matrix in konjunktiver Normalform.

b. Geben Sie eine Skolemnormalform für K an, die sich von Ihrer Lösung zu a. nicht nur durch Umbenennung und Äquivalenzumformung unterscheidet.

5 Tableaubeweis (7 Punkte)

Beweisen Sie im Tableau-Kalkül:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists x\ p(x), \\ \forall x (p(x) \rightarrow p(f(x))), \\ \forall x (\neg p(x) \leftrightarrow r(x)) \end{array} \right\} \vdash \exists x\ \neg r(f(f(x)))$$

Verwenden Sie ausschließlich die im Skript angegebenen Tableauregeln und die folgenden Regeln für die Äquivalenz:

$$\frac{1\ A \leftrightarrow B}{\begin{array}{l|l} 1\ A & 0\ A \\ 1\ B & 0\ B \end{array}} \qquad \frac{0\ A \leftrightarrow B}{\begin{array}{l|l} 0\ A & 1\ A \\ 1\ B & 0\ B \end{array}}$$

6 Modallogik (7+1 Punkte)

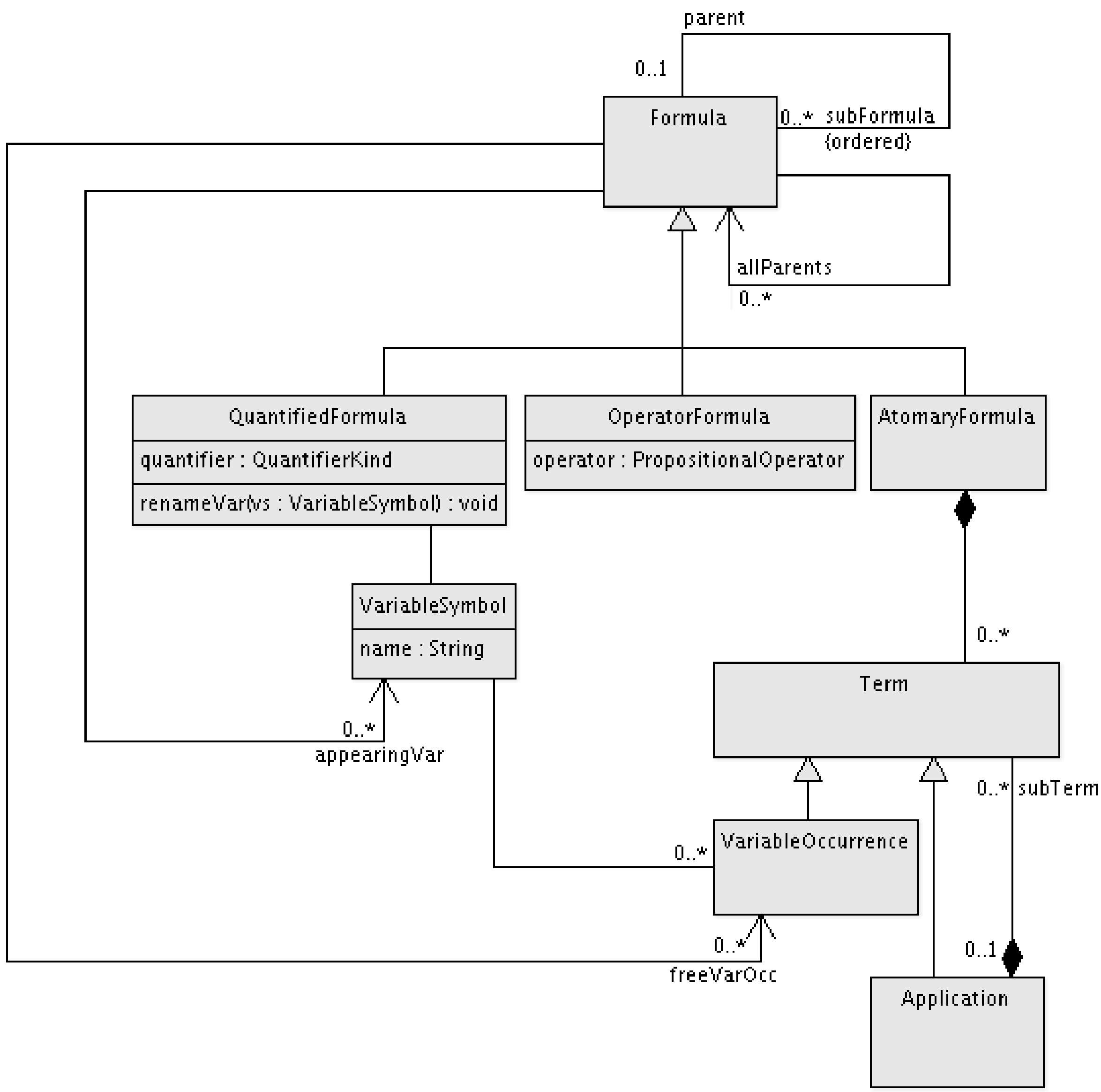
Definition Ein Kripkerahmen (S, R) heißt *schwach konfluent*, wenn er die Formel

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(y, z)))$$

erfüllt.

a. Zeigen Sie, dass die modallogische Formel $\Diamond\Box p \rightarrow \Diamond p$ die Klasse der schwach konfluenten Rahmen charakterisiert.

b. Begründen Sie kurz, warum jeder reflexive, symmetrische Kripkerahmen auch schwach konfluent ist.



parent
0..1
Formula
0..* subFormula
{ordered}
allParents
0..*
QuantifiedFormula
quantifier : QuantifierKind
renameVar(vs : VariableSymbol) : void
OperatorFormula
operator : PropositionalOperator
AtomaryFormula
VariableSymbol
name : String
0..*
appearingVar
0..*
Term
0..* subTerm
VariableOccurrence
0..*
0..*
freeVarOcc
0..1
Application

7 OCL (2+3+3) Punkte

Auf der linken Seite (auf der Rückseite zu Aufgabe 6) finden Sie einen Ausschnitt aus einer modifizierten Version des UML-Metamodels der Prädikatenlogik als Klassendiagramm.

Insbesondere verknüpft die Assoziation `appearingVar` eine Formel mit allen Variablensymbolen, die in ihr vorkommen.

Die Assoziation `freeVarOcc` verknüpft eine Formel mit allen Variablenvorkommen (Instanzen eines Variablensymbols), die in ihr frei, also nicht durch einen Quantor gebunden, auftreten.

a. Geben Sie für die folgende OCL-Invariante die Bedeutung in natürlicher Sprache an.

```
context Formula
inv:    allParents = parent.allParents->including(parent)
```

b. Geben Sie eine OCL-Invariante für die Klasse `QuantifiedFormula` an, die besagt, dass die freien Variablenvorkommen einer quantifizierten Formel gerade die freien Vorkommen der direkten Unterformeln sind, ohne die, die sich auf das quantifizierte Variablensymbol beziehen.

c. Die Methode `QuantifiedFormula::renameVar(vs: VariableSymbol)` benennt eine quantifizierte Variable um. Schreiben sie einen OCL-Methodenvertrag, der folgendes formalisiert.

> Die Methode darf nur angewendet werden, wenn das neue Variablensymbol `vs` vom bisherigen verschieden ist.
>
> Dann hat nach der Ausführung der Methode das alte Symbol keine freien Vorkommen mehr in den Unterformeln.

8 LTL (3+1 Punkte)

a. Finden Sie eine LTL-Formel F, die genau dann in einer omega-Struktur wahr ist, wenn für jeden Zeitpunkt t_p, in dem p wahr ist, gilt:

i. Es gibt Zeitpunkte t_q und t_r, die nicht vor t_p liegen und in denen q bzw. r wahr ist.

ii. Der erste Zeitpunkt nach t_p, in dem q wahr ist, liegt nicht nach dem ersten Zeitpunkt, zu dem r wahr ist.

b. **Definition** Seien P und Q LTL-Formeln. Dann ist die Semantik von $P\,\mathbf{B}\,Q$ ("P begins Q") folgendermaßen definiert:

$$\xi \models P\,\mathbf{B}\,Q :\Longleftrightarrow \text{Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ für das } \xi_n \models P \text{ gilt, gilt für } k \geq n \text{ die Aussage } \xi_k \models Q$$

Geben Sie einen zu $P\,\mathbf{B}\,Q$ äquivalenten LTL-Ausdruck an, der $\mathbf{B}$ nicht verwendet.

9 Büchi und LTL (3+3 Punkte)

Gegeben ist eine AL-Signatur Σ, die mindestens die beiden von einander verschiedenen Variablen p und q enthält. Für das Vokabular $V = \mathbb{P}(\Sigma)$ (Potenzmenge von Σ) werden die folgenden aus der Vorlesung bekannten Abkürzungen definiert:

$$\begin{aligned} P &= \{M \in V : p \in M\} \subset V \\ Q &= \{M \in V : q \in M\} \subset V \end{aligned}$$

a. Geben Sie für die LTL-Formel $F = \Diamond(p\, \mathbf{V}\, q)$ einen akzeptierenden Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ an, so dass gilt:

$$L(\mathcal{A}) = \{\xi \in V^\omega : \xi \models F\}$$

b. Sei nun $\Sigma = \{p, q\}$. Welche LTL-Formel wird von diesem Büchi-Automaten akzeptiert?