Klausur Formale Systeme

Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik

WS 2006/2007

Prof. Dr. P. H. Schmitt

22. Februar 2007

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

A1 (12)	A2 (4)	A3 (4)	A4 (9)	A5 (3)	A6 (8)	A7 (4)	A8 (7)	A9 (9)	Σ (60)

Bewertungstabelle bitte frei lassen !!!

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der erreichbaren 60 Punkte.

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (5 + 4 + 3 Punkte)

Kreuzen Sie in den folgenden Tabellen alles Zutreffende an.

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Dabei werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für jede der drei Teilaufgaben vergeben.)

Hinweise:

- „PL1“ steht für „Prädikatenlogik erster Ordnung (mit Gleichheit $\doteq$)“; auf diese beziehen sich auch die Begriffe „erfüllbar“, „allgemeingültig“ und „unerfüllbar“.
- In Teilaufgabe a. kann eine Formel mehr als eine der genannten Eigenschaften haben. In Teilaufgabe b. und c. *genau* eine.
- c ist ein Funktionssymbol (mit der richtigen Stelligkeit).
- p ist ein Prädikatssymbol (mit der richtigen Stelligkeit).
- x, y sind Variablen.
- Es gelten die üblichen Klammereinsparungsregeln.

a.

	keine Formel der PL1	erfüllbar	allgemein-gültig	uner-füllbar
$\forall x(\mathbf{0})$				×
$\forall x \forall y(p(x,y) \to p(x,x))$		×		
$\forall x \forall p(p(x) \vee \neg p(x))$	×			
$\forall x \exists y(p(x,y)) \leftrightarrow \exists y \forall x(p(y,x))$		×		
$p(c) \to \exists x(p(x))$		×	×	

b.

	Richtig	Falsch
Sei eine PL1-Formel F, eine Interpretation (D, I) und eine Variablenbelegung β gegeben. Es gilt: $val_{D,I,\beta}(F)$ ist unabhängig von der Größe von D.		×
Gegeben sei ein Büchi-Automat $\mathcal{B}$. Das Problem $L^\omega(\mathcal{B}) = \emptyset$ ist mit polynomiellem Aufwand entscheidbar.	×	
Gegeben sei eine unerfüllbare PL1-Formel F. Jedes geschlossene Tableau für F ist endlich.	×	
Es existiert eine geschlossene PL1-Formel, die erfüllbar aber nicht allgemeingültig ist.	×	

c. Sind folgende LTL-Formeln allgemeingültig, d.h. gelten in allen omega-Strukturen?

LTL-Formel	Ja	Nein
$\Diamond \mathbf{X}\, A \leftrightarrow \mathbf{X} \Diamond A$	×	
$(\Diamond A)\, \mathrm{U}\, A \leftrightarrow \Diamond A$	×	
$A\, \mathrm{U_w}\, \mathbf{0} \leftrightarrow \Diamond A$		×

2 Lineare Temporale Logik (LTL) (4 Punkte)

Sei ξ eine omega-Struktur zu einer gegebenen aussagenlogischen Signatur Σ.
Für $A, B \in \Sigma$ und alle $n \geq 0$ gelte

$$\begin{array}{lll} \xi_n \models A & \text{gdw.} & \xi'_{2n} \models A \text{ und } \xi'_{2n+1} \models A \\ \xi_n \models B & \text{gdw.} & \xi'_{2n} \models B \text{ und } \xi'_{2n+1} \models B \ . \end{array}$$

Zeigen Sie, daß für alle $n \geq 0$ gilt:

$$\xi_n \models A \,\mathrm{U}\, B \quad \text{impliziert} \quad \xi'_{2n} \models A \,\mathrm{U}\, B \text{ und } \xi'_{2n+1} \models A \,\mathrm{U}\, B \ .$$

Lösung:

$\xi_n \models A \,\mathrm{U}\, B$ impliziert (Semantik von $A \,\mathrm{U}\, B$)
es gibt ein $m \geq n$ mit $\xi_m \models B$ und $\xi_k \models A$ für alle k mit $n \leq k < m$ impliziert
(nach Voraussetzung)
$\xi'_{2m} \models B$, $\xi'_{2m+1} \models B$ und $\xi'_{2k} \models A$, $\xi'_{2k+1} \models A$ für alle k mit $n \leq k < m$ impliziert
$\xi'_{2m} \models B$, $\xi'_{2m+1} \models B$ und $\xi'_k \models A$ für alle k mit $2n \leq k < 2m$ impliziert
$\xi'_{2n} \models A \,\mathrm{U}\, B$ und $\xi'_{2n+1} \models A \,\mathrm{U}\, B$.

3 Kurze Konjunktive Normalform (4 Punkte)

Transformieren Sie die aussagenlogische Formel

$$\neg\Big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\Big)$$

in die **kurze konjunktive Normalform**.

Lösung:

1. Schritt: Abkürzungen einführen

$$\begin{aligned}&A \leftrightarrow (P \to Q)\\ &B \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)\\ &C \leftrightarrow (A \to B)\\ &\neg C\end{aligned}$$

2. Schritt: Transformation in KNF

$$\begin{aligned}& A \leftrightarrow (P \to Q)\\ \equiv\ & A \to (P \to Q) \wedge (P \to Q) \to A\\ \equiv\ & (\neg A \vee (\neg P \vee Q)) \wedge (\neg(\neg P \vee Q) \vee A)\\ \equiv\ & (\neg A \vee \neg P \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee A)\\ \equiv\ & (\neg A \vee \neg P \vee Q) \wedge (P \vee A) \wedge (\neg Q \vee A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& B \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)\\ \equiv\ & (B \to (\neg Q \to \neg P)) \wedge ((\neg Q \to \neg P) \to B)\\ \equiv\ & (\neg B \vee (Q \vee \neg P)) \wedge (\neg(Q \vee \neg P) \vee B)\\ \equiv\ & (\neg B \vee Q \vee \neg P) \wedge ((\neg Q \wedge P) \vee B)\\ \equiv\ & (\neg B \vee Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee B) \wedge (P \vee B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& C \leftrightarrow (A \to B)\\ \equiv\ & (C \to (A \to B)) \wedge ((A \to B) \to C)\\ \equiv\ & (\neg C \vee (\neg A \vee B)) \wedge (\neg(\neg A \vee B) \vee C)\\ \equiv\ & (\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee C)\\ \equiv\ & (\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned}&(\neg A \vee \neg P \vee Q) \wedge (P \vee A) \wedge (\neg Q \vee A) \wedge\\ &(\neg B \vee Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee B) \wedge (P \vee B) \wedge\\ &(\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge\\ &\neg C\end{aligned}$$

4 Modale Logik (4 + 3 + 2 Punkte)

a. Welche der folgenden Formeln ist allgemeingültig in allen **symmetrischen** Kripkestrukturen? Geben Sie für jede nicht allgemeingültige Formel ein Gegenbeispiel an.

i. $\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Diamond A$

ii. $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$

iii. $\Diamond\Box A \rightarrow A$

Lösung:

i. $\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Diamond A$ ist allgemeingültig

ii. $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$ ist nicht allgemeingültig
Gegenbeispiel:

iii. $\Diamond\Box A \rightarrow A$ ist allgemeingültig

b. Geben Sie für die Formeln aus Teilaufgabe **a.** jeweils an, ob sie die Klasse der symmetrischen Kripkestrukturen charakterisieren (Antwort "Ja") oder nicht (Antwort "Nein").

Für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen!
(Es werden jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.)

Formel	Ja	Nein
$\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Diamond A$		$\times$
$\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$		$\times$
$\Diamond\Box A \rightarrow A$	$\times$	

c. Geben Sie für eine Formel, für die Sie bei Teilaufgabe **b.** mit "Ja" geantwortet haben, einen Beweis dafür, daß diese Formel tatsächlich die Klasse der symmetrischen Kripkestrukturen charakterisiert.

Lösung:

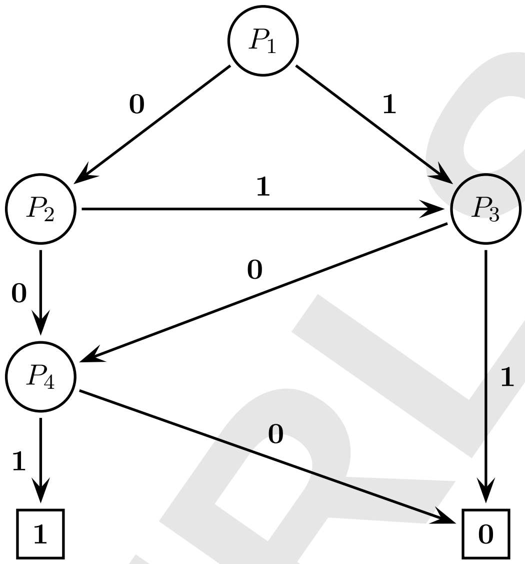
Wir nehmen an, $\Diamond\Box A \rightarrow A$ charakterisiere auch Rahmen, die nicht symmetrisch sind.
Wenn ein Rahmen (S, R) nicht symmetrisch ist, dann gibt es $s_1, s_2 \in S$ mit $R(s_1, s_2)$ und $\neg R(s_2, s_1)$. Wir definieren eine Interpretation I durch

$$I(A, s) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{falls } s = s_1 \\ \mathbf{1} & \text{falls } \mathit{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt $s_1 \not\models A$ und $s_2 \models \Box A$. Da $R(s_1, s_2)$ gilt auch $s_1 \models \Diamond\Box A$ und insgesamt $s_1 \not\models \Diamond\Box A \rightarrow A$, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

5 Shannongraphen (3 Punkte)

Gegeben sei folgender Shannongraph:



Geben Sie die zu diesem Shannongraphen äquivalente aussagenlogische Formel in **disjunktiver Normalform** an.

Lösung:

$\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3 \wedge P_4 \vee$
$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_4 \vee$
$P_1 \wedge \neg P_3 \wedge P_4$

6 Tableaukalkül (8 Punkte)

Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der Formel

$$\forall z \exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \wedge \neg p(x,x))) \;\rightarrow\; \neg \exists w \forall y (p(y,w))$$

mithilfe des Tableaukalküls.
Verwenden Sie ausschließlich die im Skript angegebenen Tableauregeln und die folgenden Regeln für die Äquivalenz:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}\ \ A \leftrightarrow B} \\ \hline \mathbf{1}\ \ A & \mathbf{0}\ \ A \\ \mathbf{1}\ \ B & \mathbf{0}\ \ B \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}\ \ A \leftrightarrow B} \\ \hline \mathbf{0}\ \ A & \mathbf{1}\ \ A \\ \mathbf{1}\ \ B & \mathbf{0}\ \ B \end{array}$$

Lösung:

[1;–] $\mathbf{0}$ $\forall z \exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \wedge \neg p(x,x))) \;\rightarrow\; \neg \exists w \forall y (p(y,w))$

[2;1] $\mathbf{1}$ $\forall z \exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z) \wedge \neg p(x,x)))$

[3;1] $\mathbf{0}$ $\neg \exists w \forall y (p(y,w))$

[4;2] $\mathbf{1}$ $\exists y \forall x (p(x,y) \leftrightarrow (p(x,z_1) \wedge \neg p(x,x)))$

[5;4] $\mathbf{1}$ $\forall x (p(x,f(z_1)) \leftrightarrow (p(x,z_1) \wedge \neg p(x,x)))$

[6;5] $\mathbf{1}$ $p(x_1,f(z_1)) \leftrightarrow (p(x_1,z_1) \wedge \neg p(x_1,x_1))$

[7;3] $\mathbf{1}$ $\exists w \forall y (p(y,w))$

[8;7] $\mathbf{1}$ $\forall y (p(y,c))$

[9;8] $\mathbf{1}$ $p(y_1,c)$

Linker Ast:

[10;6] $\mathbf{1}$ $p(x_1,f(z_1))$

[11;6] $\mathbf{1}$ $p(x_1,z_1) \wedge \neg p(x_1,x_1)$

[14;11] $\mathbf{1}$ $p(x_1,z_1)$

[15;11] $\mathbf{1}$ $\neg p(x_1,x_1)$

[16;15] $\mathbf{0}$ $p(x_1,x_1)$

$*$ (10,16)

Rechter Ast:

[12;6] $\mathbf{0}$ $p(x_1,f(z_1))$

[13;6] $\mathbf{0}$ $p(x_1,z_1) \wedge \neg p(x_1,x_1)$

[17;13] $\mathbf{0}$ $p(x_1,z_1)$

$*$ (9,17)

[18;13] $\mathbf{0}$ $\neg p(x_1,x_1)$

[19;18] $\mathbf{1}$ $p(x_1,x_1)$

$*$ (12,19)

Nach Anwendung der Substitution $\{x_1/f(c),\ y_1/f(c),\ z_1/c\}$ sind alle Äste dieses Tableaus geschlossen.

7 Davis-Putnam-Loveland Verfahren (4 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Davis-Putnam-Loveland Verfahren die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge:

$$\Big\{\{P, Q, R\}, \{\neg P, \neg Q, \neg R\}, \{P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{P, \neg Q, R\}\Big\}$$

Lösung:

1. Schritt: Keine Einerklausel vorhanden, wähle P und widerlege

$$\Big\{\{\neg Q, \neg R\}, \{Q\}, \{R\}\Big\} \tag{1}$$

und

$$\Big\{\{Q, R\}, \{\neg Q, \neg R\}, \{Q, \neg R\}, \{\neg Q, R\}\Big\} \tag{2}$$

2. Schritt: Wähle Einerklausel $\{Q\}$ in (1) und widerlege

$$\Big\{\{\neg R\}, \{R\}\Big\} \tag{3}$$

Wahl der Einerklausel R in (3) liefert $\Box$.
3. Schritt: In (2) keine Einerklausel vorhanden, wähle R und widerlege

$$\Big\{\{\neg Q\}, \{Q\}\Big\} \tag{4}$$

und

$$\Big\{\{Q\}, \{\neg Q\}\Big\} \tag{5}$$

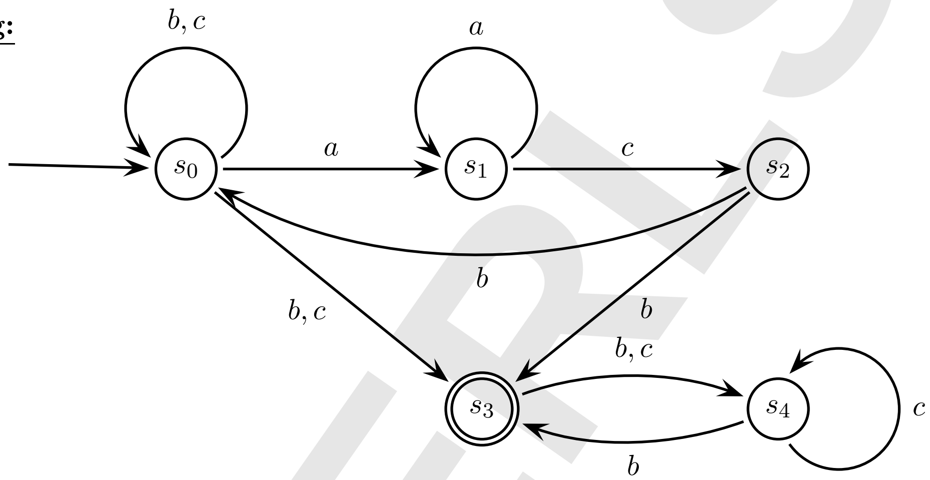
(4) und (5) lassen sich durch Wahl der Einerklausel $\{Q\}$ sofort zu $\Box$ reduzieren.

8 Büchi-Automaten (7 Punkte)

Gegeben sei das Vokabular $V = \{a, b, c\}$. Geben Sie einen Büchi-Automaten an, der ein Wort $w \in V^\omega$ **genau dann** akzeptiert, wenn gilt:

1. a kommt in w endlich oft vor,
2. b kommt in w unendlich oft vor und
3. zwischen jedem a und dem nächsten darauffolgenden b liegt genau ein c.

Lösung:



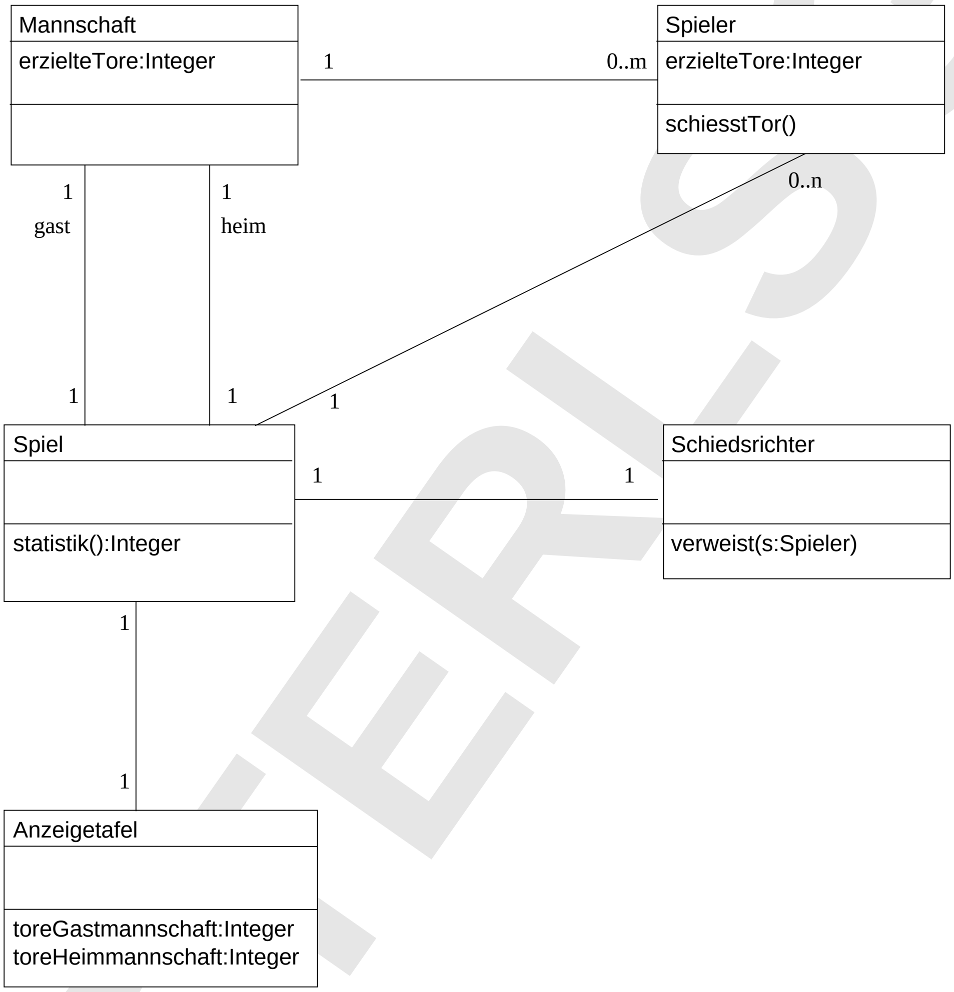


Abbildung 1: UML-Klassendiagramm

Erläuterungen:

- m und n stehen für beliebige aber feste natürliche Zahlen

Abbildung zu Aufgabe 9

9 Object Constraint Language (2 + 7 Punkte)

Das links (auf der Rückseite von Blatt 9) dargestellte UML-Klassendiagramm sei gegeben.

a. Geben Sie die Bedeutung des folgenden OCL-Constraints in natürlicher Sprache wieder.

```
context Mannschaft
inv: self.erzielteTore = self.spieler->collect(erzielteTore)->sum()
```

Lösung:

Die Anzahl der erzielten Tore einer Mannschaft ist stets gleich der Summe der erzielten Tore aller Spieler, die zu der Mannschaft gehören.

b. Geben Sie OCL-Constraints an, die die folgenden Sachverhalte ausdrücken.

i. “Nach dem Aufruf der Methode schiesstTor() in der Klasse Spieler gilt, daß die Anzahl der erzielten Tore der Mannschaft, die dem Spieler zugeordnet ist, um eins größer ist als vor dem Aufruf der Methode.”

Lösung:

```
context Spieler::schiesstTor()
post: self.mannschaft.erzielteTore = self.mannschaft.erzielteTore@pre + 1
```

ii. “Für jedes Objekt der Klasse Mannschaft gilt, daß die Anzahl der erzielten Tore stets größer oder gleich Null ist.”

Lösung:

```
context Mannschaft
inv: self.erzielteTore >= 0
```

iii. “Die Anzahl der erzielten Tore der Heimmannschaft ist stets gleich dem Wert des Attributs “toreHeimmannschaft” auf der Anzeigetafel. Analog soll dasselbe für die Gastmannschaft gelten.”

Lösung:

```
context Anzeigetafel
inv: self.toreHeimmannschaft = self.spiel.heim.erzielteTore and
     self.toreGastmannschaft = self.spiel.gast.erzielteTore
```

iv. “Die Methode statistik() in der Klasse Spiel liefert als Ergebnis die Anzahl der dem Spiel zugeordneten Spieler, die mindestens ein Tor erzielt haben.”

Lösung:

```
context Spiel::statistik():Integer
post: result = self.spieler.select(m | m.erzielteTore > 0)->size()
```