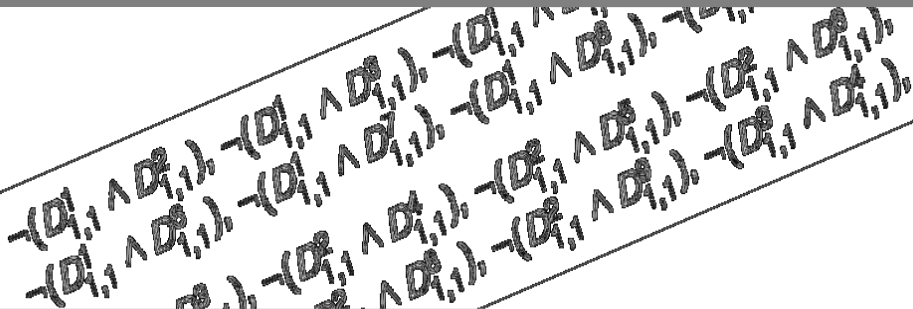


Formale Systeme

Erfüllbarkeitsproblem für spezielle Formelklassen

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



SAT

Instanz: Eine aussagenlogische Formel $F \in For_0$

Frage: Ist F erfüllbar?

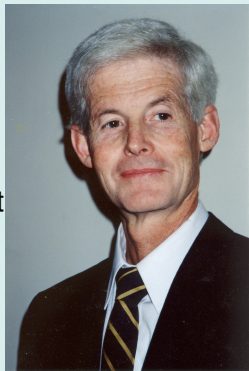
Gibt es eine Interpretation I mit $val_I(F) = \mathbf{1}$?

SAT ist ein *NP-vollständiges* Problem:

Gäbe es einen (deterministischen) polynomialen Entscheidungsalgorithmus für die Erfüllbarkeit, dann wäre $NP = P$, d. h. jedes nichtdeterministisch-polynomiale Entscheidungsproblem auch deterministisch-polynomial.

Stephen A. Cook ☆ 1939

- Informatik-Professor an der Universität Toronto
- 1971: „Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) ist NP-vollständig“
- Turing-Preisträger



Das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln A

- in KNF ist NP-vollständig
- in 3-KNF ist NP-vollständig
- in 2-KNF ist polynomial entscheidbar
- in DNF ist polynomiell entscheidbar ($O(n \log n)$ oder besser)

- k -KNF Formeln sind Konjunktionen von Disjunktionen mit höchstens k Literalen.
- 2-KNF Formeln heißen auch Krom Formeln.

Definition

Eine *Horn-Formel* ist eine aussagenlogische Formel in KNF, in der jede Disjunktion höchstens ein positives Literale enthält. Eine solche Disjunktion heißt eine *Horn-Klausel*.

Alternative Schreibweise:

$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m \vee A$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$
$\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m$	$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow \mathbf{0}$
A	A

Dabei heißt $B_1 \wedge \dots \wedge B_m$ der *Rumpf* und A der *Kopf* der Horn-Klausel $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$.

$$\begin{aligned} & \neg P \\ \wedge & (Q \vee \neg R \vee \neg S) \\ \wedge & (\neg Q \vee \neg S) \\ \wedge & R \wedge S \wedge (\neg Q \vee P) \end{aligned}$$

Alternative Schreibweise

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & (R \wedge S \rightarrow Q) \\ \wedge & (Q \wedge S \rightarrow \mathbf{0}) \\ \wedge & R \wedge S \wedge (Q \rightarrow P) \end{aligned}$$

Erfüllbarkeitsproblem für Horn Formeln

Theorem

Für Horn-Formeln ist die Erfüllbarkeit in quadratischer Zeit entscheidbar.

Sei $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ eine Hornformel.

Ein Atom in C *markieren*, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in C zu markieren.

- Schritt 0:

Markiere alle Fakten. Wenn keine vorhanden sind: gib aus „erfüllbar“ und halte an.

- Schritt 1:

Suche nach einem $D_j = R_j \rightarrow K_j$ in C , so daß alle Atome im Rumpf markiert sind aber K_j noch nicht. Falls keines existiert, gebe aus „erfüllbar“ und halte an.

Andernfalls sei $R_j \rightarrow K_j$ das erste solche D_j .

- falls $K_j \neq \mathbf{0}$: markiere K_j überall in C und wiederhole Schritt 1.
- falls $K_j = \mathbf{0}$: gebe aus „unerfüllbar“ und halte an.

Erfüllbarkeitstest

p

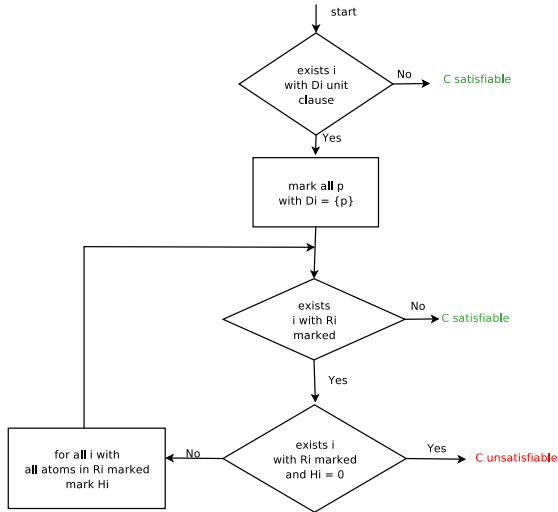
q

$q \wedge r \rightarrow s$

$p \rightarrow r$

$s \rightarrow 0$

Formelmenge nicht erfüllbar



Da höchstens so viele Schritte zu machen sind, wie es Atome in C gibt, hat der Algorithmus einen quadratischen Zeitaufwand. Zu zeigen ist noch, dass

- 1 wenn der Algorithmus mit „erfüllbar“ endet, auch eine erfüllende Belegung gefunden werden kann und
- 2 wenn C erfüllbar ist, der Algorithmus mit „erfüllbar“ abbricht.

Korrektheitsbeweis

Teil 1

Angenommen der Algorithmus endet mit der Ausgabe „erfüllbar“. Wir definieren I durch:

$$I(P) = W \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ wurde markiert.}$$

Wir zeigen:

$val_I(D_i) = W$ für $i = 1, \dots, m$,
woraus $val_I(C) = W$ folgt.

Fallunterscheidungen:

- 1 D_i ist ein Atom
- 2 $D_i = R_i \rightarrow \mathbf{0}$
- 3 $D_i = R_i \rightarrow K_i$

Korrektheitsbeweis

Teil 2

Sei I eine Interpretation mit $val_I(C) = W$.

Wir zeigen für jedes markierte Atom A $val_I(A) = W$.

Daraus folgt, dass der Algorithmus nicht mit „unerfüllbar“ abbrechen kann, da nicht alle Atome in einer Horn-Klausel der Form $R_i \rightarrow \mathbf{0}$ markiert werden können.

Für jedes markierte Atom:

$$val_l(A) = W$$

Induktion nach Anzahl der Durchläufe.

Offensichtlich wahr für die Markierungen im Schritt 0.

Angenommen das Atom A wird im $(t + 1)$ -ten Durchlauf markiert.

Dann gibt es ein $D_i = R_i \rightarrow A$ in C , so dass im t -ten Durchlauf alle Atome von R_i markiert waren.

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $val_l(R_i) = W$ gilt. Da ausserdem nach Annahme $val_l(D_i) = W$ sein soll, gilt auch $val_l(A) = W$.

Wir betrachten das Fragment $\mathcal{A}qFor$ aussagenlogischer Formeln, das einzig aus

$$\leftrightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}$$

und aussagenlogischen Variablen aufgebaute Formeln enthält.

Theorem

Eine Formel A aus $\mathcal{A}qFor$ ist eine Tautologie

gdw.

jede Aussagenvariable hat eine gerade Anzahl von Vorkommen in A

und die Konstante $\mathbf{0}$ hat eine gerade Anzahl von Vorkommen in A .

$$\left((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q) \right) \leftrightarrow \left((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0} \right)$$

ist eine Tautologie,

$$\left((P \leftrightarrow \mathbf{0}) \leftrightarrow P \right) \leftrightarrow \left(Q \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow P) \leftrightarrow P \right)$$

ist keine Tautologie.

Beweis des 1. Beispiels

Es gilt die Assoziativität

$$[(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z] \leftrightarrow [X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)]$$

$$\left((P \leftrightarrow \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \leftrightarrow Q) \right) \leftrightarrow \left((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \mathbf{0} \right)$$

$$P \leftrightarrow \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{1} \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow Q \leftrightarrow \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}$$

$\mathbf{1}$

Tautologie

Geg.

Assoz.

Komm.

$$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow \mathbf{1}$$

Beweis des 2. Beispiels

$$\left((P \leftrightarrow 0) \leftrightarrow P \right) \leftrightarrow \left(Q \leftrightarrow (0 \leftrightarrow P) \leftrightarrow P \right)$$

$$P \leftrightarrow 0 \leftrightarrow P \leftrightarrow Q \leftrightarrow 0 \leftrightarrow P \leftrightarrow P$$

$$P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow P \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow Q$$

Q

keine Tautologie

Geg.

Assoz.

Komm.

$$(X \leftrightarrow X) \leftrightarrow 1$$