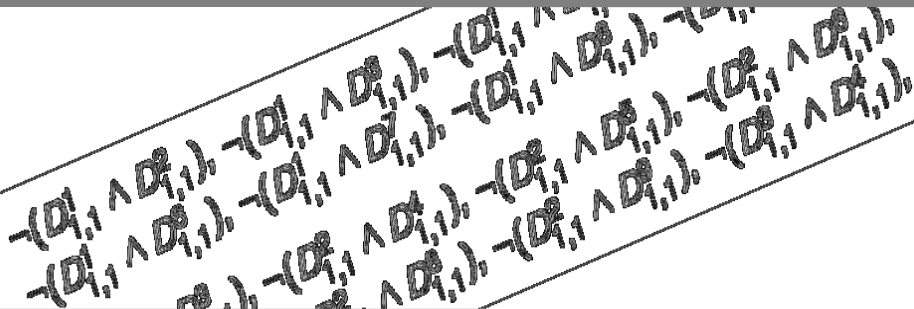


# Formale Systeme

## Aussagenlogik: Normalformen

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



# Disjunktive und Konjunktive Normalform

## Definition

- Ein **Literal** ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

# Disjunktive und Konjunktive Normalform

## Definition

- Ein **Literal** ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

# Disjunktive und Konjunktive Normalform

## Definition

- Ein **Literal** ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

# Disjunktive und Konjunktive Normalform

## Definition

- Ein **Literal** ist ein Atom oder ein negiertes Atom
- Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.
- Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

- 1 Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
- 2 Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
- 3 Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.
- 4 Disjunktive und konjunktive Normalform einer Formel sind nicht eindeutig.

- 1 Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
- 2 Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
- 3 Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.
- 4 Disjunktive und konjunktive Normalform einer Formel sind nicht eindeutig.

- 1 Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
- 2 Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
- 3 Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.
- 4 Disjunktive und konjunktive Normalform einer Formel sind nicht eindeutig.



- 1 Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  gibt es eine logisch äquivalente in disjunktiver Normalform und ebenso eine logisch äquivalente in konjunktiver Normalform.
- 2 Die Algorithmen zur Herstellung beider Normalformen ergeben sich unmittelbar aus elementaren Tautologien.
- 3 Ist die Wahrheitstafel einer Formel gegeben, so lassen sich disjunktive und konjunktive Normalform aus dieser „direkt“ ablesen.
- 4 Disjunktive und konjunktive Normalform einer Formel sind nicht eindeutig.

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Um zu prüfen, ob

$$A_n = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge \dots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

eine Tautologie ist, wird die Unerfüllbarkeit von

$$\neg A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

geprüft. Die konjunktive Normalform von  $\neg A_n$  ist:

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : 1, \dots, n \rightarrow 1, 2\}.$$

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Um zu prüfen, ob

$$A_n = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge \dots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

eine Tautologie ist, wird die Unerfüllbarkeit von

$$\neg A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

geprüft. Die konjunktive Normalform von  $\neg A_n$  ist:

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : 1, \dots, n \rightarrow 1, 2\}.$$

# Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Um zu prüfen, ob

$$A_n = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge \dots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

eine Tautologie ist, wird die Unerfüllbarkeit von

$$\neg A_n = (P_{1,1} \wedge P_{1,2}) \vee \dots \vee (P_{n,1} \wedge P_{n,2})$$

geprüft. Die konjunktive Normalform von  $\neg A_n$  ist:

$$\bigwedge \{P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)} \mid f : 1, \dots, n \rightarrow 1, 2\}.$$

Für  $n = 3$  ist das:

$$\begin{aligned} & (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,1} \vee P_{3,2}) \wedge \\ & (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1}) \wedge (P_{1,2} \vee P_{2,2} \vee P_{3,2}) \end{aligned}$$

In  $\neg A_n$  treten  $2 * n$  Literale auf, in der KNF  $n * 2^n$ .

Eingabe:  $\neg A_n = \neg((\neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}) \vee \dots \vee (\neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}))$

1. Schritt (Einführung neuer Atome):

$$\begin{array}{ll} Q_1 & \leftrightarrow \neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2} \\ \dots & \dots \\ Q_i & \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} \\ \dots & \dots \\ Q_n & \leftrightarrow \neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2} \\ Q_{n+1} & \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+2} & \leftrightarrow Q_{n+1} \vee Q_3 \\ \dots & \dots \\ Q_{2n-1} & \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n \\ \neg A_n & \leftrightarrow \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

Eingabe:  $\neg A_n = \neg((\neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}) \vee \dots \vee (\neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}))$

1. Schritt (Einführung neuer Atome):

$$\begin{array}{ll} Q_1 & \leftrightarrow \neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2} \\ \dots & \dots \\ Q_i & \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} \\ \dots & \dots \\ Q_n & \leftrightarrow \neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2} \\ Q_{n+1} & \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+2} & \leftrightarrow Q_{n+1} \vee Q_3 \\ \dots & \dots \\ Q_{2n-1} & \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n \\ \neg A_n & \leftrightarrow \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

Eingabe:  $\neg A_n = \neg((\neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}) \vee \dots \vee (\neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}))$

1. Schritt (Einführung neuer Atome):

$$\begin{array}{ll} Q_1 & \leftrightarrow \neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2} \\ \dots & \dots \\ Q_i & \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} \\ \dots & \dots \\ Q_n & \leftrightarrow \neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2} \\ Q_{n+1} & \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+2} & \leftrightarrow Q_{n+1} \vee Q_3 \\ \dots & \dots \\ Q_{2n-1} & \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n \\ \neg A_n & \leftrightarrow \neg Q_{2n-1} \end{array}$$



Eingabe:  $\neg A_n = \neg((\neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}) \vee \dots \vee (\neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}))$

1. Schritt (Einführung neuer Atome):

$$\begin{array}{ll} Q_1 & \leftrightarrow \neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2} \\ \dots & \dots \\ Q_i & \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} \\ \dots & \dots \\ Q_n & \leftrightarrow \neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2} \\ Q_{n+1} & \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+2} & \leftrightarrow Q_{n+1} \vee Q_3 \\ \dots & \dots \\ Q_{2n-1} & \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n \\ \neg A_n & \leftrightarrow \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

Eingabe:  $\neg A_n = \neg((\neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2}) \vee \dots \vee (\neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2}))$

1. Schritt (Einführung neuer Atome):

$$\begin{array}{ll} Q_1 & \leftrightarrow \neg P_{1,1} \wedge \neg P_{1,2} \\ \dots & \dots \\ Q_i & \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2} \\ \dots & \dots \\ Q_n & \leftrightarrow \neg P_{n,1} \wedge \neg P_{n,2} \\ Q_{n+1} & \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+2} & \leftrightarrow Q_{n+1} \vee Q_3 \\ \dots & \dots \\ Q_{2n-1} & \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n \\ \neg A_n & \leftrightarrow \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

## 2. Schritt (Auflösung der Äquivalenzen)

aus

...

$$Q_i \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}$$

...

$$Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2$$

...

$$Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n$$

wird

...

$$\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})$$

$\wedge$

$$Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}$$

...

$$\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2$$

$\wedge$

$$Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)$$

...

$$\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n$$

$\wedge$

$$Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)$$

## 2. Schritt (Auflösung der Äquivalenzen)

aus

$$\dots$$
$$Q_i \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2$$
$$\dots$$
$$Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n$$

wird

$$\dots$$
$$\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)$$

## 2. Schritt (Auflösung der Äquivalenzen)

aus

$$\dots$$
$$Q_i \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2$$
$$\dots$$
$$Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n$$

wird

$$\dots$$
$$\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)$$

## 2. Schritt (Auflösung der Äquivalenzen)

aus

$$\dots$$
$$Q_i \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2$$
$$\dots$$
$$Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n$$

wird

$$\dots$$
$$\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)$$

## 2. Schritt (Auflösung der Äquivalenzen)

aus

$$\dots$$
$$Q_i \leftrightarrow \neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$Q_{n+1} \leftrightarrow Q_1 \vee Q_2$$
$$\dots$$
$$Q_{2n-1} \leftrightarrow Q_{2n-2} \vee Q_n$$

wird

$$\dots$$
$$\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)$$
$$\dots$$
$$\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n$$
$$\quad \wedge$$
$$Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)$$

### 3. Schritt (konjunktive Normalform):

aus

$$\begin{array}{l} \dots \\ \neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}) \\ Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ \dots \\ \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2) \\ \dots \\ \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n) \\ \neg A_n \end{array}$$

wird

$$\begin{array}{l} \dots \\ (\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2}) \\ Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ \dots \\ \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ (Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2) \\ \dots \\ \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ (Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee Q_n) \\ \neg Q_{2n-1} \end{array}$$



### 3. Schritt (konjunktive Normalform):

aus

$$\begin{array}{l} \dots \\ \neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}) \\ Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ \dots \\ \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2) \\ \dots \\ \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n) \\ \neg A_n \end{array}$$

wird

$$\begin{array}{l} \dots \\ (\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2}) \\ Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ \dots \\ \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ (Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2) \\ \dots \\ \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ (Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee Q_n) \\ \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

### 3. Schritt (konjunktive Normalform):

aus

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}) \\ & Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ & \dots \\ & \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ & Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2) \\ & \dots \\ & \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ & Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n) \\ & \neg A_n \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} & \dots \\ & (\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2}) \\ & Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ & \dots \\ & \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ & (Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2) \\ & \dots \\ & \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ & (Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee Q_n) \\ & \neg Q_{2n-1} \end{aligned}$$

### 3. Schritt (konjunktive Normalform):

aus

$$\begin{array}{l} \dots \\ \neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}) \\ Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ \dots \\ \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2) \\ \dots \\ \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n) \\ \neg A_n \end{array}$$

wird

$$\begin{array}{l} \dots \\ (\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2}) \\ Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ \dots \\ \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ (Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2) \\ \dots \\ \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ (Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee Q_n) \\ \neg Q_{2n-1} \end{array}$$

### 3. Schritt (konjunktive Normalform):

aus

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}) \\ & Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ & \dots \\ & \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ & Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2) \\ & \dots \\ & \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ & Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n) \\ & \neg A_n \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} & \dots \\ & (\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2}) \\ & Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ & \dots \\ & \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ & (Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2) \\ & \dots \\ & \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ & (Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee Q_n) \\ & \neg Q_{2n-1} \end{aligned}$$

### 3. Schritt (konjunktive Normalform):

aus

...

$$\neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2})$$

$$Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}$$

...

$$\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2$$

$$Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2)$$

...

$$\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n$$

$$Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n)$$

$$\neg A_n$$

wird

...

$$(\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2})$$

$$Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2}$$

...

$$\neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2$$

$$(Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2)$$

...

$$\neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n$$

$$(Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee Q_n)$$

$$\neg Q_{2n-1}$$

### 3. Schritt (konjunktive Normalform):

aus

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \neg Q_i \vee (\neg P_{i,1} \wedge \neg P_{i,2}) \\ & Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ & \dots \\ & \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ & Q_{n+1} \vee \neg(Q_1 \vee Q_2) \\ & \dots \\ & \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ & Q_{2n-1} \vee \neg(Q_{2n-2} \vee Q_n) \\ & \neg A_n \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} & \dots \\ & (\neg Q_i \vee \neg P_{i,1}) \wedge (\neg Q_i \vee \neg P_{i,2}) \\ & Q_i \vee P_{i,1} \vee P_{i,2} \\ & \dots \\ & \neg Q_{n+1} \vee Q_1 \vee Q_2 \\ & (Q_{n+1} \vee \neg Q_1) \wedge (Q_{n+1} \vee \neg Q_2) \\ & \dots \\ & \neg Q_{2n-1} \vee Q_{2n-2} \vee Q_n \\ & (Q_{2n-1} \vee \neg Q_{2n-2}) \wedge (Q_{2n-1} \vee Q_n) \\ & \neg Q_{2n-1} \end{aligned}$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$



Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$



Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

Eingabe:  $A_3 = (\neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}) \wedge (\neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2})$   
Berechne KNF für  $\neg A_3$

1. Schritt:

$$Q_1 \leftrightarrow \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_2 \leftrightarrow \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_3 \leftrightarrow \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_4 \leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2$$

$$Q_5 \leftrightarrow Q_4 \wedge Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$



2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

## 2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

## 3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

## 2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

## 3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

2. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$Q_1 \vee (P_{1,1} \wedge P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$Q_2 \vee (P_{2,1} \wedge P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$Q_3 \vee (P_{3,1} \wedge P_{3,2})$$

$$\neg Q_4 \vee (Q_1 \wedge Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$\neg Q_5 \vee (Q_4 \wedge Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

3. Schritt:

$$\neg Q_1 \vee \neg P_{1,1} \vee \neg P_{1,2}$$

$$(Q_1 \vee P_{1,1}) \wedge (Q_1 \vee P_{1,2})$$

$$\neg Q_2 \vee \neg P_{2,1} \vee \neg P_{2,2}$$

$$(Q_2 \vee P_{2,1}) \wedge (Q_2 \vee P_{2,2})$$

$$\neg Q_3 \vee \neg P_{3,1} \vee \neg P_{3,2}$$

$$(Q_3 \vee P_{3,1}) \wedge (Q_3 \vee P_{3,2})$$

$$(\neg Q_4 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_4 \vee Q_2)$$

$$Q_4 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2$$

$$(\neg Q_5 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_5 \vee Q_3)$$

$$Q_5 \vee \neg Q_4 \vee \neg Q_3$$

$$\neg Q_5$$

## Theorem

*Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  mit  $n$  Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform  $A_{kknf}$ , so dass*

- $A$  ist erfüllbar gdw  $A_{kknf}$  erfüllbar ist,*
- $A_{kknf}$  enthält höchstens  $c * n$  Literalvorkommen für eine von  $n$  unabhängige Konstante  $c$ ,*
- $A_{kknf}$  effektiv aus  $A$  in polynomieller (sogar linearer) Zeit konstruiert werden kann.*



## Theorem

*Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  mit  $n$  Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform  $A_{kknf}$ , so dass*

- *$A$  ist erfüllbar gdw  $A_{kknf}$  erfüllbar ist,*
- *$A_{kknf}$  enthält höchstens  $c * n$  Literalvorkommen für eine von  $n$  unabhängige Konstante  $c$ ,*
- *$A_{kknf}$  effektiv aus  $A$  in polynomieller (sogar linearer) Zeit konstruiert werden kann.*

## Theorem

*Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  mit  $n$  Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform  $A_{kknf}$ , so dass*

- *$A$  ist erfüllbar gdw  $A_{kknf}$  erfüllbar ist,*
- *$A_{kknf}$  enthält höchstens  $c * n$  Literalvorkommen für eine von  $n$  unabhängige Konstante  $c$ ,*
- *$A_{kknf}$  effektiv aus  $A$  in polynomieller (sogar linearer) Zeit konstruiert werden kann.*

## Theorem

*Zu jeder aussagenlogischen Formel  $A$  mit  $n$  Literalvorkommen gibt es eine konjunktive Normalform  $A_{kknf}$ , so dass*

- *$A$  ist erfüllbar gdw  $A_{kknf}$  erfüllbar ist,*
- *$A_{kknf}$  enthält höchstens  $c * n$  Literalvorkommen für eine von  $n$  unabhängige Konstante  $c$ ,*
- *$A_{kknf}$  effektiv aus  $A$  in polynomieller (sogar linearer) Zeit konstruiert werden kann.*